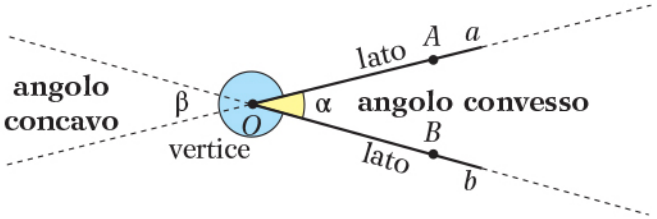
Lattes

# Angoli e rette nel piano

# Angoli

Un **angolo** è ciascuna delle due parti illimitate in cui due semirette *a* e *b* aventi l'origine in comune dividono un piano. Le due semirette appartengono a ognuno dei due angoli.




Le semirette *a* e *b* sono i **lati** dell'angolo; il punto *O*, origine delle due semirette, è il **vertice** dell'angolo.

**Angolo convesso**: angolo che non contiene il prolungamento dei lati.

**Angolo concavo**: angolo che contiene il prolungamento dei lati.

Un angolo si può indicare in modi diversi:

- $\alpha$: con una lettera dell'alfabeto greco
- *AÔB* se è convesso, *AŎB* se è concavo
- *aÔb* se è convesso, *aŎb* se è concavo
- *Ô* se è convesso, *Ŏ* se è concavo

Lattes

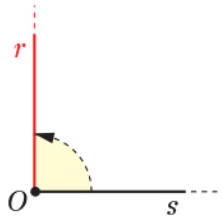
# Classificazione degli angoli

## ANGOLO NULLO, GIRO, RETTO E PIATTO

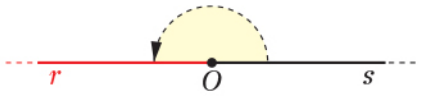
Consideriamo due semirette *r* e *s* di origine *O* e coincidenti. Supponiamo di mantenere ferma *s* e di far ruotare in verso antiorario *r*:

**angolo nullo**

**angolo giro**




**angolo retto**



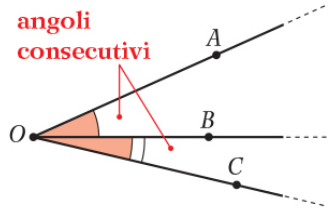

**angolo piatto**

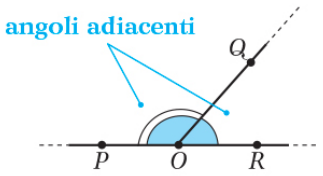
## ANGOLI CONSECUTIVI E ANGOLI ADIACENTI

Gli angoli possono essere classificati osservando la loro posizione reciproca.

- Due angoli sono **consecutivi** se hanno in comune il vertice, un lato e nessun altro punto.

- Due angoli sono **adiacenti** se sono consecutivi e hanno i lati non comuni appartenenti alla stessa retta.



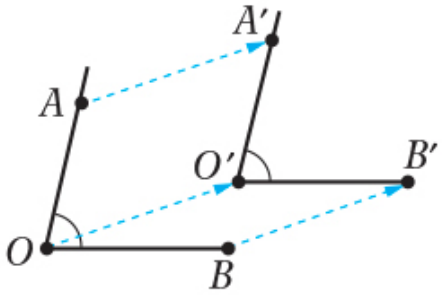




Lattes

# Confronto di due angoli

Di un angolo si può misurare l'**ampiezza**. Confrontare tra loro due angoli significa quindi stabilire se hanno la stessa ampiezza o se uno ha una ampiezza minore o maggiore dell'altro.

Per poterli confrontare occorre sovrapporli:

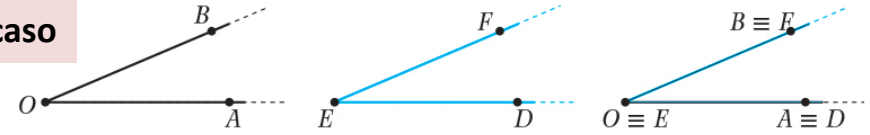



Un angolo, dopo lo spostamento, deve essere assolutamente identico a prima: cambia solo la sua **posizione**. Gli angoli *AÔB* e *A'Ô'B'* si dicono **congruenti** e si scrive ***AÔB*** ≅ ***A'Ô'B'***

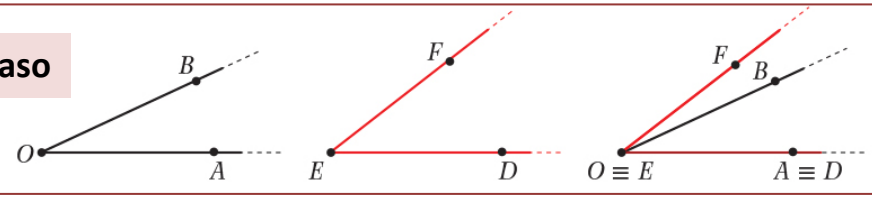
Il confronto di due angoli qualsiasi *AÔB* e *DÊF* si effettua trasportando l'angolo *AÔB*, con un movimento rigido, e sovrapponendolo all'angolo *DÊF* in modo che coincidano i vertici *O* ed *E* e una coppia di lati (per esempio *OA* con *ED*).

Si possono verificare tre casi:

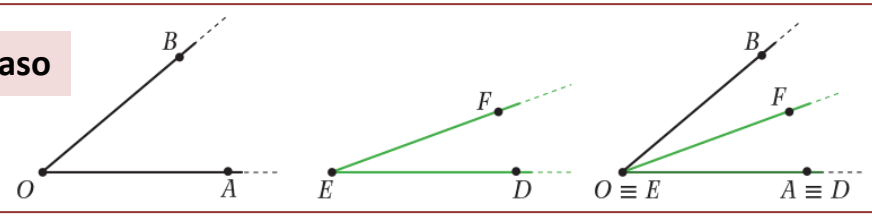
**1° caso**




**2° caso**




**3° caso**



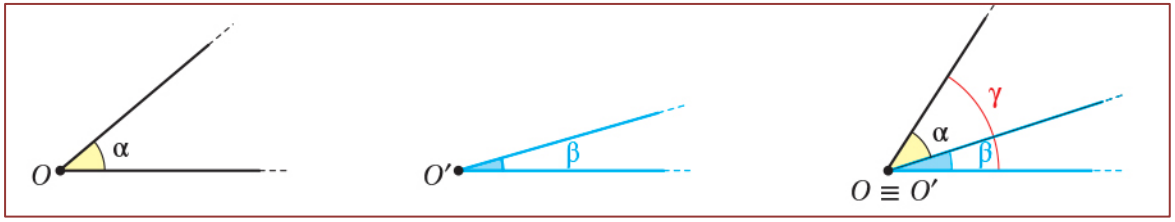

Lattes

# Operazioni con gli angoli

## ADDIZIONE DI ANGOLI

L'operazione con la quale si determina la somma di due angoli è detta **addizione**.

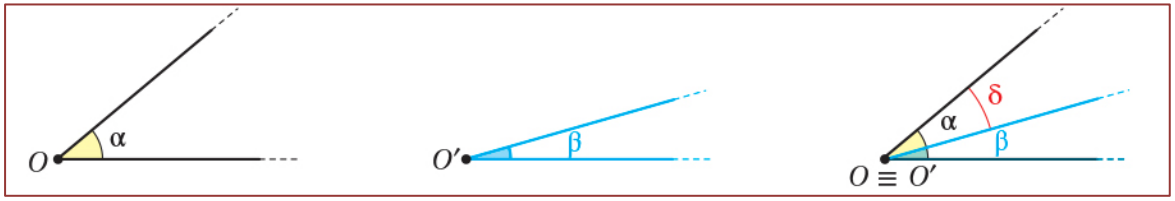
L'angolo $\gamma$ è la **somma** degli angoli $\alpha$ e $\beta$ e si scrive: $\alpha + \beta = \gamma$




## SOTTRAZIONE DI ANGOLI

L'operazione con la quale si determina la differenza fra due angoli è detta **sottrazione**.

L'angolo $\delta$ è la **differenza** degli angoli $\alpha$ e $\beta$ e si scrive: $\alpha - \beta = \delta$



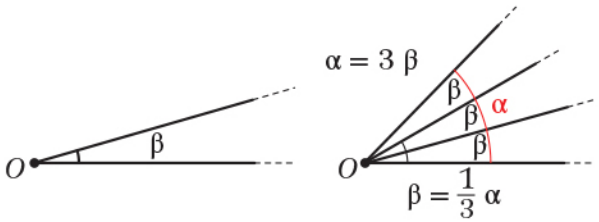

Lattes

# Operazioni con gli angoli

## MULTIPLI E SOTTOMULTIPLI DI UN ANGOLO

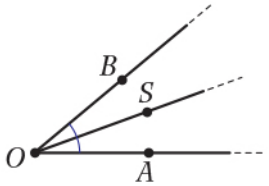
Dato l'angolo $\beta$, costruiamo l'angolo $\alpha$ addizionando tre angoli congruenti a $\beta$.

- L'angolo $\alpha$ è **multiplo** dell'angolo $\beta$.
  Si scrive $\alpha = 3\beta$ e si legge $\alpha$ *è uguale a tre volte* $\beta$.
- L'angolo $\beta$ è **sottomultiplo** dell'angolo $\alpha$.
  Si scrive $\beta = \frac{1}{3}\alpha$ e si legge $\beta$ *è la terza parte di* $\alpha$.




## BISETTRICE DI UN ANGOLO

La **bisettrice** di un angolo è la semiretta, avente origine nel vertice, che divide l'angolo in due angoli congruenti fra loro.




La semiretta *OS* è la bisettrice dell'angolo *AÔB* per cui si ha *AÔS* ≅ *SÔB.*

$$A\hat{O}S = \frac{1}{2}A\hat{O}B \qquad \text{e} \qquad A\hat{O}B = 2\,A\hat{O}S$$

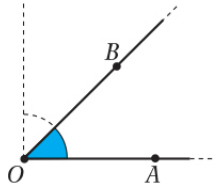
Lattes

# Angoli notevoli

## ANGOLI ACUTI E ANGOLI OTTUSI

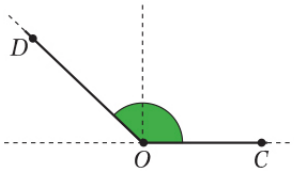
**Angolo acuto**: angolo minore di un angolo retto.

$A\hat{O}B < 90°$



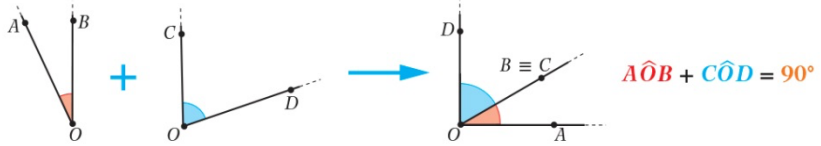

**Angolo ottuso**: angolo maggiore di un angolo retto ma minore di un angolo piatto.

$90° < C\hat{O}D < 180°$



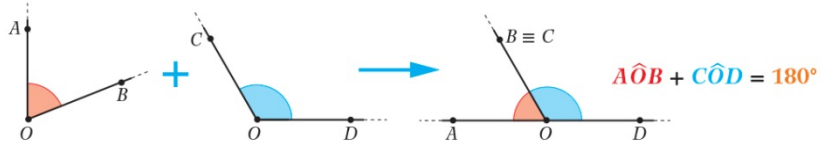

## ANGOLI COMPLEMENTARI

Due angoli si dicono **complementari** se la loro somma è un angolo retto.




## ANGOLI SUPPLEMENTARI

Due angoli si dicono **supplementari** se la loro somma è un angolo piatto.

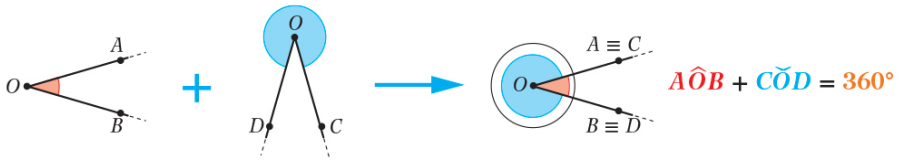



Lattes

# Angoli notevoli

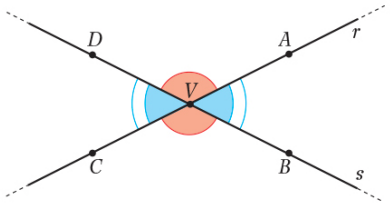
## ANGOLI ESPLEMENTARI

Due angoli si dicono **esplementari** se la loro somma è un angolo giro.

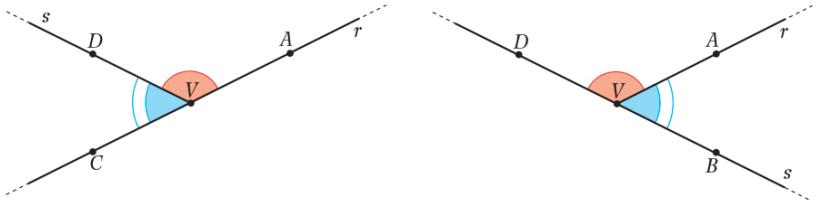



## ANGOLI OPPOSTI AL VERTICE

Due angoli sono **opposti al vertice** se i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro.




Applicando le tecniche del confronto si può verificare che **due angoli opposti al vertice sono congruenti**:




$C\hat{V}D + D\hat{V}A = 180°$ e $A\hat{V}B + D\hat{V}A = 180°$

Lattes

# Problemi con gli angoli

**PROBLEMA 1**

*La somma di due angoli misura* 68° *e la loro differenza* 32°.
*Qual è l'ampiezza dei due angoli?*

**DATI**

$\alpha + \beta = 68°$

$\alpha - \beta = 32°$

**INCOGNITE**

$\alpha$ = angolo maggiore

$\beta$ = angolo minore

**SVOLGIMENTO**

(somma + differenza) : 2 = angolo maggiore

$\alpha = (68° + 32°) : 2 = 50°$

(somma – differenza) : 2 = angolo minore

$\beta = (68° - 32°) : 2 = 18°$

Lattes

# Problemi con gli angoli

**PROBLEMA 2**

*La somma di due angoli misura* 148° *e uno è triplo dell'altro. Qual è l'ampiezza dei due angoli?*

**DATI**

$\alpha + \beta = 148°$

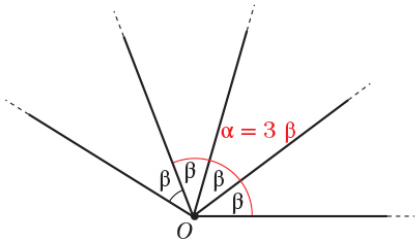
$\alpha = 3\beta$

**INCOGNITE**

$\alpha$ = angolo maggiore

$\beta$ = angolo minore

**RAPPRESENTAZIONE GRAFICA**




**SVOLGIMENTO**

$\beta = 148° : 4 = 37°$

$\alpha = 37° \times 3 = 111°$

Lattes

# Problemi con gli angoli

**PROBLEMA 3**

*Due angoli sono complementari e uno è doppio dell'altro. Qual è l'ampiezza dei due angoli?*

**DATI**

$\alpha + \beta = 90°$

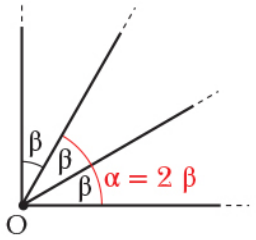
$\alpha = 2\beta$

**INCOGNITE**

$\alpha$ = angolo maggiore

$\beta$ = angolo minore

**RAPPRESENTAZIONE GRAFICA**




**SVOLGIMENTO**

$\beta = 90° : 3 = 30°$

$\alpha = 30° \times 2 = 60°$

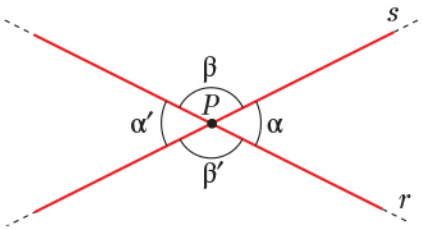
Lattes

# Rette perpendicolari

Due rette che giacciono nello stesso piano si dicono **complanari**.

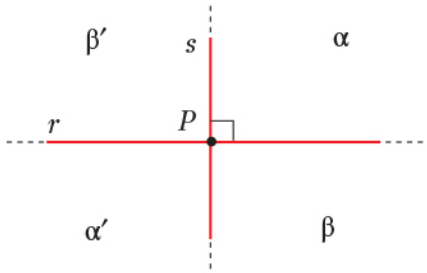
Possono essere:

- **incidenti** se si incontrano in un punto e formano due coppie di angoli opposti al vertice congruenti.




$r \cap s = \{P\}$

- **perpendicolari** se sono incidenti e dividono il piano in quattro angoli retti congruenti.




Si scrive $r \perp s$ e si legge *r perpendicolare s*

- **oblique** se sono incidenti ma non sono perpendicolari.

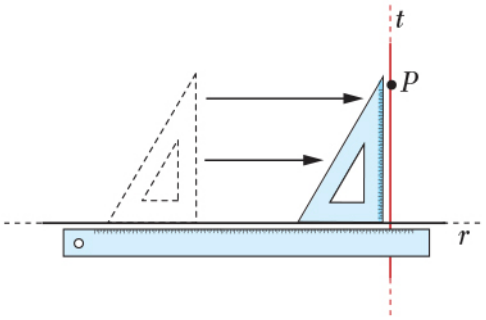
Lattes

# Rette perpendicolari

## PERPENDICOLARE A UNA RETTA PER UN PUNTO

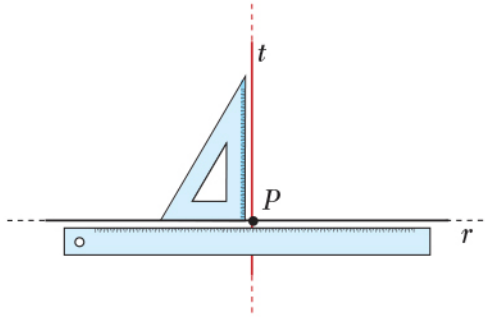
Per un punto qualsiasi passa una e una sola retta perpendicolare alla retta data.

- Il punto **non appartiene** alla retta data:




$P \in t$ $P \notin r$ $t \perp r$

- Il punto **appartiene** alla retta data:



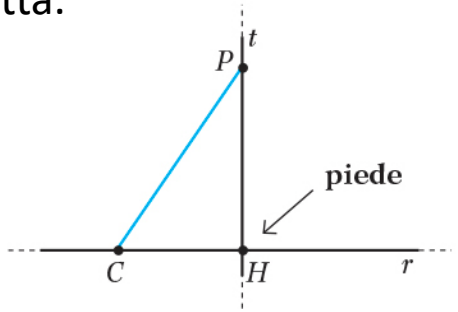

$P \in t$ $P \in r$ $t \perp r$

Lattes

# Proiezioni su una retta

## PROIEZIONE DI UN PUNTO SU UNA RETTA

La **distanza** fra un punto *P* e una retta *r* è la lunghezza del segmento di perpendicolare condotto da quel punto alla retta.




Il punto *H*, intersezione delle rette *t* e *r*, è il **piede** della perpendicolare o **proiezione** del punto *P* sulla retta *r*.

Il segmento *PC* è l'**obliqua** rispetto alla retta *r*.

Il segmento *PH* è la **distanza** del punto *P* dalla retta *r*.

Il segmento perpendicolare condotto da un punto a una retta è sempre minore di qualunque obliqua:

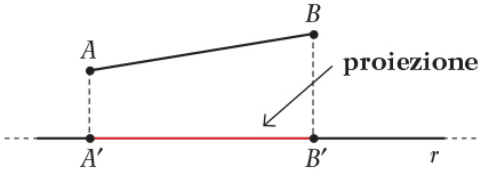
***PH < PC***

Lattes

# Proiezioni su una retta

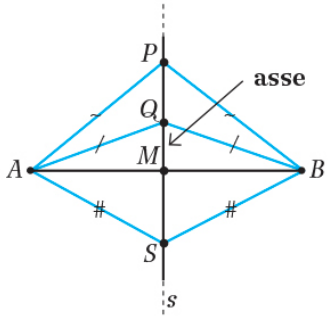
## PROIEZIONE DI UN SEGMENTO SU UNA RETTA

Data una retta *r* e un segmento *AB* non appartenente ad essa, se conduciamo le perpendicolari dagli estremi *A* e *B* su *r* otteniamo il segmento *A'B'* che è la **proiezione ortogonale** del segmento *AB* sulla retta *r*.




## ASSE DI UN SEGMENTO

L'**asse** di un segmento è la retta perpendicolare passante per il punto medio del segmento.




La retta *s* è l'asse del segmento *AB*.

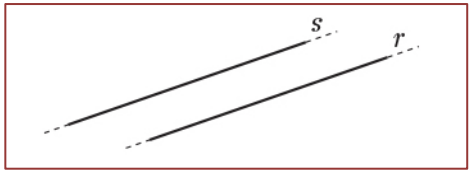
Ogni punto dell'asse di un segmento è equidistante dagli estremi del segmento:

***PA = PB*** ***QA = QB*** ***SA = SB***

Lattes

# Rette parallele

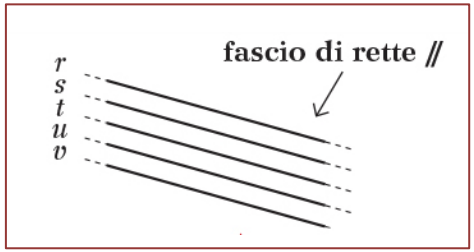
Due rette che giacciono sullo stesso piano (complanari) e che non hanno alcun punto in comune, oppure se coincidono, si dicono **parallele**.



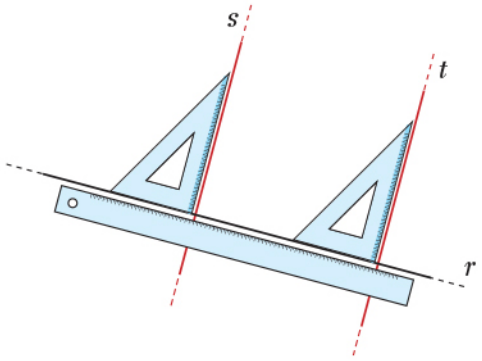

Le rette *r* e *s* sono parallele, si scrive *r* // *s* e si legge *r parallela s*.

Due rette sono **coincidenti** quando ogni punto dell'una appartiene anche all'altra.

Quando due rette sono parallele si dice che hanno la stessa **direzione**. L'insieme delle infinite rette di un piano parallele a una retta *r* costituiscono un **fascio di rette parallele**.




Due rette perpendicolari a una retta data sono parallele fra loro.




Lattes

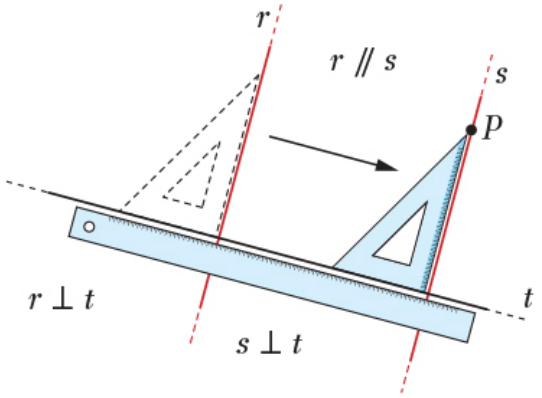
# Rette parallele

## PARALLELA A UNA RETTA PER UN PUNTO

**Postulato di Euclide o delle rette parallele**:

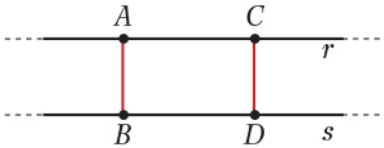
*Per un punto P esterno a una retta r passa una e una sola retta parallela a essa.*

Le rette *r* e *s* risultano entrambe perpendicolari alla retta *t* e quindi parallele fra loro.




## DISTANZA DI DUE RETTE PARALLELE

Se due rette sono parallele, tutti i punti di una di esse hanno uguale distanza dall'altra retta:




Tutti i segmenti di perpendicolare condotti da qualunque punto della retta *r* alla retta parallela *s* sono congruenti.

Lattes

# Rette parallele tagliate da una trasversale

Disegniamo due rette *r* e *s* e una retta *t* che le taglia nei punti *A* e *B*. La retta *t*, che prende il nome di **trasversale**, forma con le rette *r* e *s* otto angoli:

due coppie di angoli **alterni interni**:

3 e 6  4 e 5

due coppie di angoli **alterni esterni**:

1 e 8  2 e 7

quattro coppie di angoli **corrispondenti**:

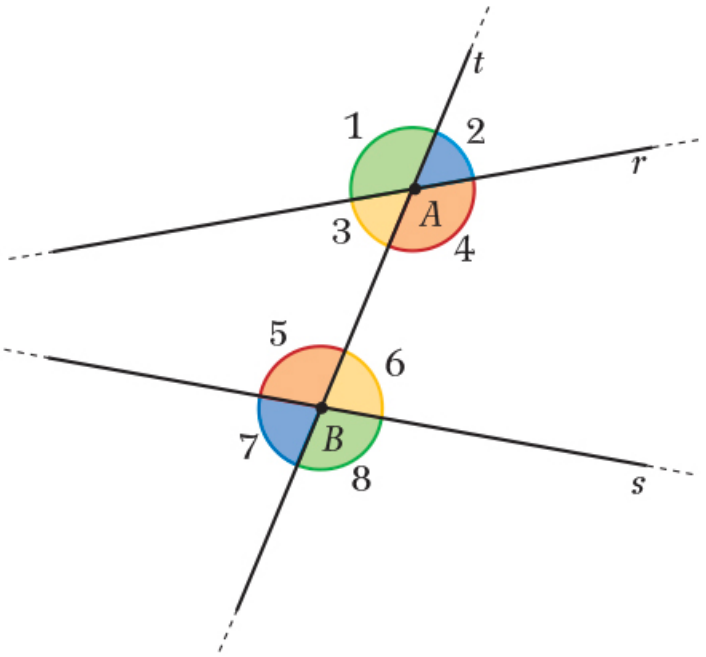
1 e 5  2 e 6  3 e 7  4 e 8

due coppie di angoli **coniugati interni**:

3 e 5  4 e 6

due coppie di angoli **coniugati esterni**:

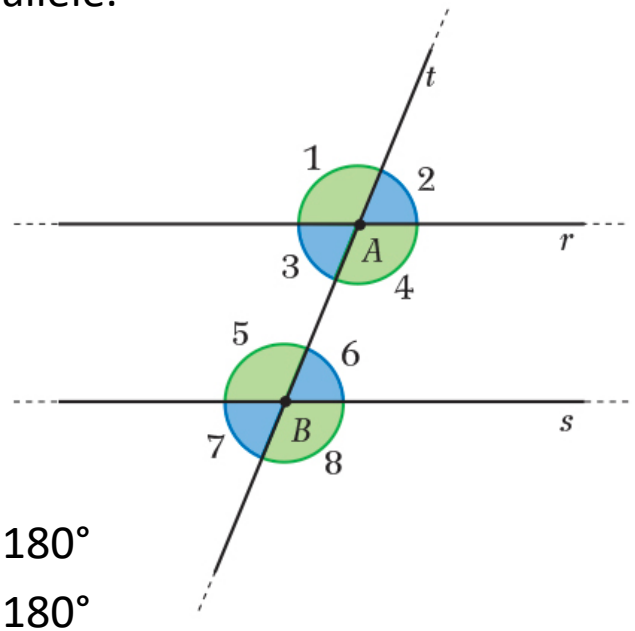
1 e 7  2 e 8




Lattes

# Rette parallele tagliate da una trasversale

Consideriamo ora il caso in cui le due rette *r* e *s* sono parallele.




Sono **congruenti** le seguenti coppie di angoli:

**alterni interni**: 3 = 6 4 = 5

**alterni esterni**: 1 = 8 2 = 7

**corrispondenti**: 1 = 5 2 = 6 3 = 7 4 = 8

Sono **supplementari** le seguenti coppie di angoli:

**coniugati interni**: 3 + 5 = 180° 4 + 6 = 180°

**coniugati esterni**: 1 + 7 = 180° 2 + 8 = 180°

Se due rette tagliate da una trasversale formano angoli alterni (interni o esterni) congruenti, o angoli corrispondenti congruenti o angoli coniugati (interni o esterni) supplementari, allora sono parallele.

Lattes