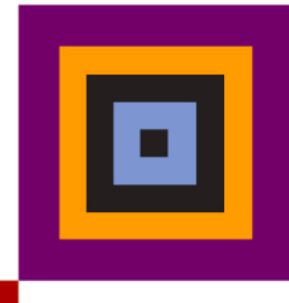
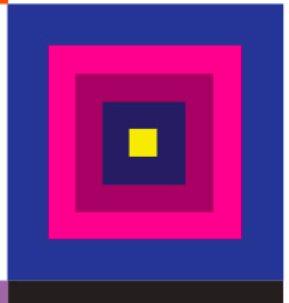
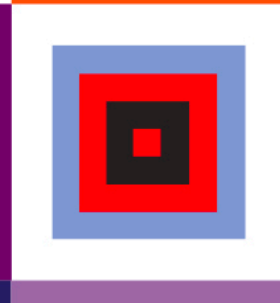
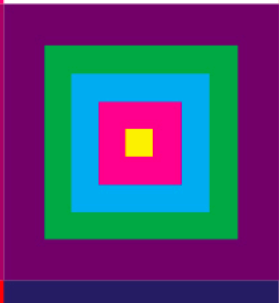
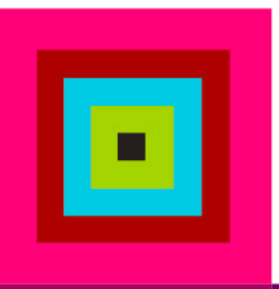


Lattes

Divisibilità



Multipli di un numero

Consideriamo l'insieme $\mathbf{N} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots n, \dots)$ e moltiplichiamo ciascun elemento per un qualsiasi numero naturale diverso da 0, per esempio 4. Otteniamo l'insieme:

$$\mathbf{M}_4 = (0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots 4 \times n \dots)$$

i cui elementi sono tutti multipli di 4.

Si dice multiplo di un numero a diverso da 0, ogni numero naturale che si ottiene moltiplicando a per ciascun elemento di \mathbf{N} .

$$\mathbf{72} \text{ è un multiplo di } \mathbf{12} \text{ perché } \mathbf{12 \times 6 = 72}$$

Poiché l'insieme \mathbf{N} ha infiniti elementi anche i multipli di un numero sono infiniti.

Divisori di un numero

La divisione tra due numeri naturali a e b può avere come resto 0 oppure un altro numero r minore di b :

$$a : b = q \quad \text{e resto } 0$$

La divisione è **esatta** per cui a è divisibile per b .

$$a : b = q \quad \text{e resto } r$$

La divisione non è esatta per cui a non è divisibile per b .

Ad esempio:

28 è divisibile per 4

4 è un divisore di 28

28 è un multiplo di 4

4 è un sottomultiplo di 28

L'insieme dei divisori di un numero naturale a diverso da 0 si indica con \mathbf{D}_a che è un insieme finito e tra i suoi elementi ci sono sempre 1 e a .

L'insieme dei divisori di 28 si indica con:

$$\mathbf{D}_{28} = (1, 2, 4, 7, 14, 28)$$

Criteri di divisibilità

Utilizzando i criteri di divisibilità è possibile stabilire se un numero è divisibile per un altro senza effettuare la divisione.

Criterio di divisibilità per 2

$$M_2 = (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, \dots)$$

Un numero è divisibile per 2 se l'ultima cifra a destra è pari.

Criterio di divisibilità per 5

$$M_5 = (5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots)$$

Un numero è divisibile per 5 se l'ultima cifra a destra è 0 oppure 5.

Criterio di divisibilità per 3

$$M_3 = (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \dots, 771, \dots, 73251, \dots)$$

Un numero è divisibile per 3 se la somma delle sue cifre è un multiplo di 3.

Criterio di divisibilità per 9

$$M_9 = (9, 18, 27, 36, \dots, 369, \dots, 1485, \dots)$$

Un numero è divisibile per 9 se la somma delle sue cifre è un multiplo di 9.

Criteri di divisibilità

Criterio di divisibilità per 4

$$\mathbf{M}_4 = (4, 8, 12, 16, 24, \dots, 100, \dots, 168, \dots, 944, \dots)$$

Un numero è divisibile per 4 se le sue due ultime cifre formano un numero divisibile per 4 o sono entrambe 0.

Criterio di divisibilità per 25

$$\mathbf{M}_{25} = (25, 50, 75, 100, 125, \dots, 1575, \dots, 4025, \dots)$$

Un numero è divisibile per 25 se le sue due ultime cifre formano un numero divisibile per 25 o sono entrambe 0.

Criterio di divisibilità per 10, 100, ...

$$\mathbf{M}_{10} = (10, 20, 30, \dots)$$

$$\mathbf{M}_{100} = (100, 200, 300, \dots)$$

Un numero è divisibile per 10, 100, ... se termina rispettivamente con uno, due, ... zeri.

Scomposizione in fattori primi

Tra i divisori di un numero ci sono sempre il numero stesso e l'unità: i numeri che hanno come divisori solo se stessi e 1 sono detti **numeri primi**. Consideriamo i divisori di 11 e di 19:

$$D_{11} = (1, 11)$$

$$D_{19} = (1, 19)$$

Pertanto 11 e 19 sono numeri primi. I numeri primi sono infiniti. I numeri non primi, cioè quelli che hanno più di due divisori, sono chiamati **numeri composti**.

I numeri composti si possono scomporre nel prodotto di due o più fattori primi:

$$6 = 2 \times 3$$

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$$

Scomposizione in fattori primi

Vediamo un metodo per scomporre in fattori primi un numero grande, ad esempio 156.

156 : 2	si divide per il più piccolo divisore primo (2) e il risultato si inserisce sotto il 156
78 : 2	si divide per il più piccolo divisore primo (2)
39 : 3	si divide per il più piccolo divisore primo (3)
13 : 13	13 è primo ed è divisibile solo per 13
1	il quoziente è 1 quindi l'operazione è terminata

$$156 = 2^2 \times 3 \times 13$$

Per scomporre un numero in fattori primi lo si divide per il più piccolo numero primo che sia suo divisore e si va avanti così fino a ottenere il quoziente 1.

Il numero dato è uguale al prodotto di tutti i numeri primi usati come divisori.

Scomposizione in fattori primi

DIVISIBILITÀ DI UN NUMERO PER UN ALTRO

Per riconoscere se un numero è divisibile per un altro, ad esempio 1848 e 308, scomponiamo entrambi in fattori:

$$1848 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11$$

$$308 = 2^2 \times 7 \times 11$$

Se nel numero più grande compaiono tutti i fattori del secondo numero, con esponente uguale o maggiore, allora il primo numero è divisibile per il secondo:

$$1848 : 308 = (2^3 \times 3 \times 7 \times 11) : (2^2 \times 7 \times 11) =$$

$$= 2^{3-2} \times 3 \times 7^{1-1} \times 11^{1-1} =$$

$$= 2^1 \times 3 \times 7^0 \times 11^0 = 6$$

Massimo Comune Divisore (M.C.D.)

UN PROBLEMA

18 ragazzi e 12 ragazze partecipano a un torneo di tiro con l'arco. Devono essere divisi nel maggior numero di gruppi contenenti lo stesso numero di ragazzi e ragazze. Quanti gruppi si possono formare?

Occorre trovare il più grande dei divisori comuni di 18 e 12.

$$D_{18} = (1, 2, 3, 6, 9, 18)$$

$$D_{12} = (1, 2, 3, 4, 6, 12)$$

I numeri **1, 2, 3, 6** rappresentano i divisori comuni di 12 e 18.

Il maggiore dei divisori comuni è **6** per questo è detto Massimo Comune Divisore e si scrive:

$$\mathbf{M.C.D. (12, 18) = 6}$$

Il **Massimo Comune Divisore (M.C.D.)** di due o più numeri è il maggiore dei loro divisori comuni. Due numeri si dicono primi fra loro se hanno come M.C.D. l'unità. Dati i numeri 9 e 4:

$$D_9 = (1, 3, 9)$$

$$D_4 = (1, 2, 4)$$

$$\mathbf{M.C.D. (9, 4) = 1}$$

Minimo comune multiplo (m.c.m.)

UN PROBLEMA

Anna frequenta un corso di chitarra ogni 8 giorni e va in palestra ogni 10 giorni. Quando i due giorni coincidono Anna deve rinunciare a uno dei due corsi perché gli orari sono gli stessi. Oggi gli orari coincidono e Anna decide di rinunciare alla palestra. Fra quanti giorni gli orari coincideranno nuovamente?

Occorre trovare il più piccolo dei multipli comuni di 8 e 10.

$$M_8 = (8, 16, 24, 32, \mathbf{40}, 48, 56, 64, 72, \mathbf{80}, 88, \dots)$$

$$M_{10} = (10, 20, 30, \mathbf{40}, 50, 60, 70, \mathbf{80}, 90, 100, \dots)$$

I numeri **40** e **80** rappresentano i multipli comuni di 8 e 10. Il minore di questi è 40 e per questo è detto minimo comune multiplo (m.c.m.):

$$\mathbf{m.c.m. (8, 10) = 40}$$

Il **minimo comune multiplo (m.c.m.)** di due o più numeri è il minore dei loro multipli comuni.

Problemi con M.C.D. e m.c.m.

UN PROBLEMA

Un produttore vuole confezionare ceste di frutta. Ha a disposizione 16 kg di lamponi, 48 kg di fragole e 56 kg di mirtilli. Le ceste devono essere tutte uguali come peso, come suddivisione di frutti e il maggior numero possibile. Quante ceste potrà preparare? Quanti kg di frutti di ciascun tipo conterrà ogni cesta?

Il numero di ceste dovrà essere un divisore comune di 16, 48, 56.

$$D_{16} = (1, 2, 4, \mathbf{8}, 16)$$

$$D_{48} = (1, 2, 3, 4, 6, \mathbf{8}, 12, 16, 24, 48)$$

$$D_{56} = (1, 2, 4, 7, \mathbf{8}, 14, 28, 56)$$

Per ottenere il numero maggiore di ceste occorre calcolare:

$$\mathbf{M.C.D. (16, 48, 56) = 8}$$

Ogni cesta conterrà:

$$16 : 8 = 2 \text{ kg di lamponi}$$

$$48 : 8 = 6 \text{ kg di fragole}$$

$$56 : 8 = 7 \text{ kg di mirtilli}$$

Problemi con M.C.D. e m.c.m.

UN PROBLEMA

Tre insegne luminose intermittenti si accendono contemporaneamente alle 21: la prima si riaccenderà dopo 15 s, la seconda dopo 12 s e la terza dopo 25 s. Dopo quanti secondi le insegne si accenderanno di nuovo contemporaneamente?

Le tre insegne si accenderanno contemporaneamente dopo un numero di secondi multiplo di 15, 12 e 25:

$$\mathbf{M}_{15} = (15, 30, 45, \dots, 270, 285, \mathbf{300}, \dots, 585, \mathbf{600}, \dots)$$

$$\mathbf{M}_{12} = (12, 24, 36, \dots, 276, 288, \mathbf{300}, 312, \dots, \mathbf{600}, 612, \dots)$$

$$\mathbf{M}_{25} = (25, 50, 75, \dots, 275, \mathbf{300}, 325, 575, \mathbf{600}, 625, \dots)$$

Le insegne si accenderanno contemporaneamente dopo:

$$\mathbf{m.c.m. (15, 12, 25) = 300 \text{ secondi}}$$