Divisibilità

Multipli di un numero

Consideriamo l'insieme **N** = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …*n*, ...) e moltiplichiamo ciascun elemento per un qualsiasi numero naturale diverso da 0, per esempio 4. Otteniamo l'insieme:

$$\mathbf{M_4 = (0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots\ 4} \times \boldsymbol{n} \ \mathbf{\ldots\ )}$$

i cui elementi sono tutti multipli di 4.

Si dice multiplo di un numero a diverso da 0, ogni numero naturale che si ottiene moltiplicando a per ciascun elemento di **N**.

72 è un multiplo di **12** perché **12** x **6** = **72**

Poiché l'insieme **N** ha infiniti elementi anche i multipli di un numero sono infiniti.

Divisori di un numero

La divisione tra due numeri naturali ***a*** e ***b*** può avere come resto 0 oppure un altro numero *r* minore di ***b***:

$$a : b = q \qquad \text{e resto } \mathbf{0}$$

La divisione è **esatta** per cui ***a*** è divisibile per ***b.***

$$a : b = q \qquad \text{e resto } r$$

La divisione non è esatta per cui ***a*** non è divisibile per ***b.***

Ad esempio:

28 è divisibile per 4 **4 è un divisore di 28**

28 è un multiplo di 4 **4 è un sottomultiplo di 28**

L'insieme dei divisori di un numero naturale *a* diverso da 0 si indica con $\mathbf{D}_a$ che è un insieme finito e tra i suoi elementi ci sono sempre 1 e *a.*

L'insieme dei divisori di 28 si indica con:

$$\mathbf{D}_{28} = (1, 2, 4, 7, 14, 28)$$

Lattes

Criteri di divisibilità

Utilizzando i criteri di divisibilità è possibile stabile se un numero è divisibile per un altro senza effettuare la divisione.

Criterio di divisibilità per 2

$$\mathbf{M}_2 = (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ...)$$

Un numero è divisibile per 2 se l'ultima cifra a destra è pari.

Criterio di divisibilità per 5

$$\mathbf{M}_5 = (5, 10, 15, 20, 25, 30, ...)$$

Un numero è divisibile per 5 se l'ultima cifra a destra è 0 oppure 5.

Criterio di divisibilità per 3

$$\mathbf{M}_3 = (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, ..., 771, ..., 73251, ...)$$

Un numero è divisibile per 3 se la somma delle sue cifre è un multiplo di 3.

Criterio di divisibilità per 9

$$\mathbf{M}_9 = (9, 18, 27, 36, ... , 369, ..., 1485, ...)$$

Un numero è divisibile per 9 se la somma delle sue cifre è un multiplo di 9.

Criteri di divisibilità

Criterio di divisibilità per 4

$$\mathbf{M}_4 = (4, 8, 12, 16, 24, ..., 100, ..., 168, ..., 944, ...)$$

Un numero è divisibile per 4 se le sue due ultime cifre formano un numero divisibile per 4 o sono entrambe 0.

Criterio di divisibilità per 25

$$\mathbf{M}_{25} = (25, 50, 75, 100, 125, ..., 1575, ..., 4025, ...)$$

Un numero è divisibile per 25 se le sue due ultime cifre formano un numero divisibile per 25 o sono entrambe 0.

Criterio di divisibilità per 10, 100, …

$$\mathbf{M}_{10} = (10, 20, 30, ...) \qquad \mathbf{M}_{100} = (100, 200, 300, ...)$$

Un numero è divisibile per 10, 100, ... se termina rispettivamente con uno, due, ... zeri.

Lattes

Scomposizione in fattori primi

Tra i divisori di un numero ci sono sempre il numero stesso e l'unità: i numeri che hanno come divisori solo se stessi e 1 sono detti **numeri primi**. Consideriamo i divisori di 11 e di 19:

$\mathbf{D}_{11} = (1, 11)$ $\mathbf{D}_{19} = (1, 19)$

Pertanto 11 e 19 sono numeri primi. I numeri primi sono infiniti.
I numeri non primi, cioè quelli che hanno più di due divisori, sono chiamati **numeri composti**.
I numeri composti si possono scomporre nel prodotto di due o più fattori primi:

$\mathbf{6} = \mathbf{2} \times \mathbf{3}$ $\mathbf{36} = \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{2}^{\mathbf{2}} \times \mathbf{3}^{\mathbf{2}}$

Lattes

Scomposizione in fattori primi

Vediamo un metodo per scomporre in fattori primi un numero grande, ad esempio 156.

156 : 2	si divide per il più piccolo divisore primo (2) e il risultato si inserisce sotto il 156
78 : 2	si divide per il più piccolo divisore primo (2)
39 : 3	si divide per il più piccolo divisore primo (3)
13 : 13	13 è primo ed è divisibile solo per 13
1	il quoziente è 1 quindi l'operazione è terminata

$$156 = 2^2 \times 3 \times 13$$

Per scomporre un numero in fattori primi lo si divide per il più piccolo numero primo che sia suo divisore e si va avanti così fino a ottenere il quoziente 1.

Il numero dato è uguale al prodotto di tutti i numeri primi usati come divisori.

Lattes

Scomposizione in fattori primi

DIVISIBILITÀ DI UN NUMERO PER UN ALTRO

Per riconoscere se un numero è divisibile per un altro, ad esempio 1848 e 308, scomponiamo entrambi in fattori:

$$1848 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11 \qquad 308 = 2^2 \times 7 \times 11$$

Se nel numero più grande compaiono tutti i fattori del secondo numero, con esponente uguale o maggiore, allora il primo numero è divisibile per il secondo:

$$1848 : 308 = (2^3 \times 3 \times 7 \times 11) : (2^2 \times 7 \times 11) =$$

$$= 2^{3-2} \times 3 \times 7^{1-1} \times 11^{1-1} =$$

$$= 2^1 \times 3 \times 7^0 \times 11^0 = 6$$

Lattes

Massimo Comune Divisore (M.C.D.)

UN PROBLEMA

18 ragazzi e 12 ragazze partecipano a un torneo di tiro con l'arco. Devono essere divisi nel maggior numero di gruppi contenenti lo stesso numero di ragazzi e ragazze. Quanti gruppi si possono formare?

Occorre trovare il più grande dei divisori comuni di 18 e 12.

$\mathbf{D_{18}} = (\mathbf{1, 2, 3, 6,}\ 9, 18)$ $\mathbf{D_{12}} = (\mathbf{1, 2, 3},\ 4,\ \mathbf{6},\ 12)$

I numeri **1, 2, 3, 6** rappresentano i divisori comuni di 12 e 18.

Il maggiore dei divisori comuni è **6** per questo è detto Massimo Comune Divisore e si scrive:

M.C.D. (12, 18) = 6

Il **Massimo Comune Divisore (M.C.D.)** di due o più numeri è il maggiore dei loro divisori comuni. Due numeri si dicono primi fra loro se hanno come M.C.D. l'unità. Dati i numeri 9 e 4:

$\mathbf{D_9} = (\mathbf{1}, 3, 9)$ $\mathbf{D_4} = (\mathbf{1}, 2, 4)$ M.C.D. (9, 4) = **1**

Lattes

Minimo comune multiplo (m.c.m.)

UN PROBLEMA

Anna frequenta un corso di chitarra ogni 8 giorni e va in palestra ogni 10 giorni. Quando i due giorni coincidono Anna deve rinunciare a uno dei due corsi perché gli orari sono gli stessi. Oggi gli orari coincidono e Anna decide di rinunciare alla palestra. Fra quanti giorni gli orari coincideranno nuovamente?

Occorre trovare il più piccolo dei multipli comuni di 8 e 10.

$$\mathbf{M}_8 = (8, 16, 24, 32, \mathbf{40}, 48, 56, 64, 72, \mathbf{80}, 88, \ldots)$$

$$\mathbf{M}_{10} = (10, 20, 30, \mathbf{40}, 50, 60, 70, \mathbf{80}, 90, 100, \ldots)$$

I numeri **40** e **80** rappresentano i multipli comuni di 8 e 10. Il minore di questi è 40 e per questo è detto minimo comune multiplo (m.c.m.):

$$\textbf{m.c.m.}\ (8, 10) = \mathbf{40}$$

Il **minimo comune multiplo (m.c.m.)** di due o più numeri è il minore dei loro multipli comuni.

Lattes

Problemi con M.C.D. e m.c.m.

UN PROBLEMA

Un produttore vuole confezionare ceste di frutta. Ha a disposizione 16 kg *di lamponi,* 48 kg *di fragole* e 56 kg *di mirtilli. Le ceste devono essere tutte uguali come peso, come suddivisione di frutti e il maggior numero possibile. Quante ceste potrà preparare? Quanti kg di frutti di ciascun tipo conterrà ogni cesta?*

Il numero di ceste dovrà essere un divisore comune di 16, 48, 56.

$\mathbf{D}_{16} = (1, 2, 4, 8, 16)$

$\mathbf{D}_{48} = (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48)$

$\mathbf{D}_{56} = (1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56)$

Per ottenere il numero maggiore di ceste occorre calcolare:

M.C.D. (16, 48, 56) = 8

Ogni cesta conterrà:

16 : 8 = 2 kg di lamponi   48 : 8 = 6 kg di fragole   56 : 8 = 7 kg di mirtilli

Lattes

Problemi con M.C.D. e m.c.m.

UN PROBLEMA

Tre insegne luminose intermittenti si accendono contemporaneamente alle 21: la prima si riaccenderà dopo 15 s, *la seconda dopo* 12 s *e la terza dopo* 25 s. *Dopo quanti secondi le insegne si accenderanno di nuovo contemporaneamente?*

Le tre insegne si accenderanno contemporaneamente dopo un numero di secondi multiplo di 15, 12 e 25:

$$\mathbf{M}_{15} = (15, 30, 45, ..., 270, 285, \mathbf{300}, ..., 585, \mathbf{600}, ...)$$

$$\mathbf{M}_{12} = (12, 24, 36, ..., 276, 288, \mathbf{300}, 312, ..., \mathbf{600}, 612, ...)$$

$$\mathbf{M}_{25} = (25, 50, 75, ..., 275, \mathbf{300}, 325, 575, \mathbf{600}, 625, ...)$$

Le insegne si accenderanno contemporaneamente dopo:

m.c.m. (15, 12, 25) = **300** secondi

Lattes