Lattes

Calcolo letterale

Formule ed espressioni algebriche letterali

Le **formule** permettono di sintetizzare e di riassumere i procedimenti. Nelle formule si usano le lettere per indicare dei numeri.

In una formula non è indicato il valore numerico di ogni lettera, ma il legame che esiste tra le grandezze che le lettere rappresentano:

$2 \cdot (b + h)$ $\qquad$ $3 \cdot x + 11$

si dicono **espressioni letterali**.

Il segno · (moltiplicazione) può essere omesso e così le stesse scritture si presentano più sintetiche:

$2\,(b + h)$ $\qquad$ $3x + 11$

Un'**espressione letterale** è un'espressione in cui compaiono numeri e lettere o solo lettere legate tra loro da segni di operazione.

Le lettere rappresentano numeri di cui non si indica il valore, ma di cui si sa che appartengono all'insieme **R**.

Lattes

Formule ed espressioni algebriche letterali

VALORE DI UN'ESPRESSIONE ALGEBRICA LETTERALE

Per determinare il **valore numerico** di un'**espressione letterale** si sostituisce a ogni lettera il valore numerico assegnato e si eseguono i calcoli nell'espressione numerica così ottenuta.

Per calcolare il valore numerico di un'espressione letterale è indispensabile che i valori attribuiti alle lettere ci portino a eseguire operazioni possibili, altrimenti l'espressione numerica che ne deriva non è risolvibile.

L'espressione letterale:

$$\boldsymbol{a^2 + 7ab}$$

- per $a = 2$ e $b = 1$ si trasforma nell'espressione numerica:

  $$2^2 + 7 \cdot 2 \cdot 1 = 4 + 14$$

  che assume il valore numerico 18.

- per $a = 8$ e $b = -2$ si trasforma nell'espressione numerica:

  $$8^2 + 7 \cdot 8 \cdot (-2) = 64 - 112$$

  che assume il valore numerico -48.

Monomi

Il **monomio** è un’espressione letterale nella quale compaiono solo le operazioni di moltiplicazione ed elevamento a potenza e gli esponenti della parte letterale sono numeri naturali.

In ogni monomio si distinguono un **coefficiente** e una **parte letterale:**

- il **coefficiente** è un numero relativo e costituisce la parte numerica che precede sempre la parte letterale;
- la **parte letterale** deve essere scritta secondo l’ordine alfabetico e calcolando il risultato delle moltiplicazioni e divisioni fra le lettere.

$$-\frac{3}{4}a^2b^3$$

$-\frac{3}{4}$ è la parte numerica e a^2b^3 è la parte letterale

Monomi

- Se il **coefficiente** è **+ 1** si omette e si scrive solo la parte letterale:

  $+ 1xy^4 = xy^4$
- Se il **coefficiente** è **− 1** si scrive solo la parte letterale preceduta dal segno negativo:

  $- 1a^3b^4 = - a^3b^4$
- Se il **coefficiente** è **0** il monomio è detto monomio nullo e si indica con 0:

  $0b^2c^4 = 0$

Due monomi si dicono:

- **simili** se hanno la stessa parte letterale:

  $- 2a^2cx; + 9a^2cx$
- **uguali** se sono simili e hanno lo stesso coefficiente:

  $- 7a^3bc^2; - 7a^3bc^2$
- **opposti** se sono simili e hanno coefficienti opposti:

  $- 4ab^2; + 4ab^2$

Lattes

Monomi

GRADO DI UN MONOMIO

Il **grado relativo di un monomio** rispetto a una lettera è l'esponente a cui quella lettera è elevata.

Il monomio:

$$+\frac{4}{7}a^7b^3c^4$$

è di 7° grado rispetto alla lettera *a*, di 3° grado rispetto alla lettera *b*, di 4° grado rispetto alla lettera *c.*

Il **grado di un monomio** è la somma degli esponenti di tutte le lettere che vi compaiono.

Nel monomio:

$$+\frac{4}{7}a^7b^3c^4$$

addizionando gli esponenti di tutte le lettere 7 + 3 + 4 = 14 si deduce che è di quattordicesimo grado.

Operazioni con i monomi

Con i monomi si possono effettuare tutte le operazioni che sappiamo risolvere nell'insieme **R**. Esse godono delle stesse proprietà.

ADDIZIONE ALGEBRICA

Nell'eseguire un'addizione algebrica di due o più monomi possiamo incontrare tre casi:

- **monomi non simili fra loro**: $-7a$; $+4x^3$; $-18xy$
  si scrivono i monomi l'uno accanto all'altro con il relativo segno e si lascia la somma algebrica indicata:
  $-7a+4x^3-18xy$
- **monomi simili fra loro**: $+5a^2x^3$; $-3a^2x^3$; $+6a^2x^3$
  si scrivono i monomi l'uno accanto all'altro con il relativo segno e si esegue la somma della parte numerica:
  $+5a^2x^3-3a^2x^3+6a^2x^3=8a^2x^3$
- **monomi simili a gruppi**: $-3a^2b^3$; $-4a$; $+7a^2b^3$; $+3a$
  si scrivono i monomi l'uno accanto all'altro e si individuano quelli simili che possiamo evidenziare in colore diverso:
  $-3a^2b^3-4a+7a^2b^3+3a$
  si riscrivono raggruppando i monomi simili e si esegue la somma:
  $-3a^2b^3+7a^2b^3-4a+3a=+4a^2b^3-a$

La **somma algebrica di due o più monomi** simili è un monomio simile a quelli dati e avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

Operazioni con i monomi

MOLTIPLICAZIONE

Per risolvere le moltiplicazioni algebriche è necessario ricordare la seguente proprietà delle potenze:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Il **prodotto di due o più monomi** è il monomio che ha per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale le lettere che compaiono nei vari monomi, scritte una volta sola e aventi per esponente la somma degli esponenti con cui compaiono nei vari monomi.

Possiamo indicare la moltiplicazione di due monomi in questi due modi:

$(-5abx) \cdot (-9a^2b^3x^4)$ oppure $-5abx \cdot (-9a^2b^3x^4)$

Per eseguire il calcolo applichiamo le proprietà della moltiplicazione e dell'elevamento a potenza:

- proprietà commutativa: $(-5)(-9)(aa^2)(bb^3)(xx^4)$
- proprietà associativa: $(+45)(aa^2)(bb^3)(xx^4)$
- proprietà delle potenze: $+45a^3b^4x^5$

Operazioni con i monomi

ELEVAMENTO A POTENZA

Come nell'insieme **R**, elevare a potenza un monomio significa moltiplicare tante volte la base quante volte lo indica l'esponente:

$$(-15b^2xy^3)^2 = (-15b^2xy^3) \cdot (-15b^2xy^3) =$$

$$(-15)^2(b^2)^2(x)^2(y^3)^2 = 225b^4x^2y^6$$

La **potenza di un monomio** è il monomio avente:

- per coefficiente l'elevamento a potenza del suo coefficiente;
- per parte letterale l'elevamento a potenza della sua parte letterale.

Operazioni con i monomi

DIVISIONE

Per risolvere le divisioni algebriche è necessario ricordare le seguenti proprietà delle potenze:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad \text{e} \qquad a^0 = 1$$

Per calcolare il quoziente di due monomi si calcolano separatamente il coefficiente, come quoziente dei coefficienti dei due monomi, e la parte letterale applicando per ogni lettera le proprietà delle potenze riportate sopra.

Due monomi sono detti divisibili se la parte letterale del dividendo contiene tutte le lettere del divisore con esponente uguale o maggiore.

Il **quoziente di due monomi divisibili**, di cui il secondo non nullo, è un monomio avente:

- per coefficiente il quoziente dei coefficienti;
- per parte letterale tutte le lettere del dividendo, ciascuna scritta una volta sola e avente per esponente la differenza fra gli esponenti con cui essa compare nel dividendo e nel divisore.

$$+14a^3b^7c^5 : (-2ab^3c^4) = -7a^2b^4c$$

Polinomi

Il **polinomio** è la somma algebrica di più monomi non simili.

I monomi che formano il polinomio si dicono **termini** del polinomio. Un polinomio con due, tre, quattro termini è detto rispettivamente **binomio**, **trinomio**, **quadrinomio**.

Se in un polinomio compaiono termini simili devono essere addizionati fra loro: questa operazione è detta **riduzione dei termini simili**.
Per effettuare la **riduzione dei termini simili** di un polinomio basta sostituire a ogni gruppo di termini simili la loro somma algebrica.

Il **grado di un polinomio** è individuato dal grado del monomio che ha il grado maggiore. Nel polinomio:

$$+3x^2y^3 - 2x^3 + 5x^2y^4$$

i gradi dei vari monomi sono rispettivamente 5, 3, 6, quindi il polinomio è di 6° grado.

Il **grado relativo di un polinomio rispetto a una lettera** è il più alto esponente con cui la lettera compare nel polinomio.
Nel polinomio precedente il grado relativo alla lettera x è 3 e il grado relativo alla lettera y è 4.

Polinomi

- Un polinomio si dice **omogeneo** se tutti i termini hanno lo stesso grado:

  $2a^3b + ab^3 - 7b^4$

- Un polinomio si dice **ordinato** secondo le potenze decrescenti (o crescenti) di una lettera quando gli esponenti della lettera si succedono in modo decrescente (o crescente):

  $4a^3b - 6a^2b + 3ab - 15b$ è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera a

  $3x^2y + 2xy^2 - 3x^3y^3 + 6xy^4$ è ordinato secondo le potenze crescenti della lettera y

- Un polinomio di un dato grado rispetto a una lettera si dice **completo** se in esso figurano tutte le potenze di quella lettera dalla maggiore sino a quella di grado zero; altrimenti è detto **incompleto**. Il termine in cui la lettera compare con l'esponente zero è detto **termine noto:**

  $5ax^3 + 2ax^2 + ax - 4a$ è completo rispetto alla lettera x

  $20x^3 - 4x - 35$ è incompleto

Operazioni con i polinomi

ADDIZIONE

La **somma di due polinomi** si ottiene scrivendo l'uno di seguito all'altro i loro termini, ciascuno con il proprio segno, e riducendo i termini simili.

$$(-5xy + 3x^2) + (-7xy - 7xy^2 + 3x^2) =$$

eliminiamo le parentesi, scriviamo uno dopo l'altro i termini dei polinomi, ciascuno con il proprio segno, ed eliminiamo il segno di addizione:

$$= -5xy + 3x^2 - 7xy - 7xy^2 + 3x^2 =$$

addizioniamo i termini simili riducendo il polinomio a forma normale:

$$= -12xy + 6x^2 - 7xy^2$$

Operazioni con i polinomi

SOTTRAZIONE

La **differenza fra due polinomi** si ottiene scrivendo i termini del primo, ciascuno con il proprio segno, di seguito quelli del secondo polinomio con il segno cambiato e riducendo i termini simili.

$$(-5xy + 3x^2) - (-7xy - 7xy^2 + 3x^2) =$$

addizioniamo al primo polinomio l'opposto del secondo:

$$= (-5xy + 3x^2) + (+7xy + 7xy^2 - 3x^2) =$$

$$= -5xy + 3x^2 + 7xy + 7xy^2 - 3x^2 =$$

riduciamo i termini simili ed eliminiamo i termini opposti:

$$= +2xy + 7xy^2$$

Operazioni con i polinomi

MOLTIPLICAZIONE DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO

Il **prodotto di un polinomio per un monomio**, o viceversa, si ottiene moltiplicando ciascun termine del polinomio per il monomio e addizionando poi i prodotti ottenuti.

$$(4a^3b^3 + 7a^3b^2 - 3ab)(-3ab) =$$

applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:

$$= 4a^3b^3(-3ab) + 7a^3b^2(-3ab) - 3ab(-3ab) =$$

$$= -12a^4b^4 - 21a^4b^3 + 9a^2b^2$$

Operazioni con i polinomi

MOLTIPLICAZIONE DI DUE POLINOMI

Il **prodotto di due polinomi** si ottiene moltiplicando ciascun termine del primo polinomio per tutti i termini del secondo ed eseguendo la somma algebrica dei prodotti parziali ottenuti.

$$(3ab^3 + 4ab - 7ab^2)(2ab - a) =$$

applichiamo una prima volta la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma:

$$= 3ab^3(2ab - a) + 4ab(2ab - a) - 7ab^2(2ab - a) =$$

applichiamo ancora la proprietà distributiva:

$$= 3ab^3(2ab) + 3ab^3(-a) + 4ab(2ab) + 4ab(-a) - 7ab^2(2ab) - 7ab^2(-a) =$$

$$= 6a^2b^4 - 3a^2b^3 + 8a^2b^2 - 4a^2b - 14a^2b^3 + 7a^2b^2 =$$

addizioniamo i termini simili:

$$= 6a^2b^4 - 17a^2b^3 + 15a^2b^2 - 4a^2b$$

Possiamo osservare che il grado del polinomio così ottenuto è la somma algebrica dei gradi dei due polinomi che costituiscono i fattori della moltiplicazione.

Operazioni con i polinomi

DIVISIONE DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO

Il **quoziente di un polinomio e di un monomio** non nullo si ottiene dividendo ciascun termine del polinomio per il monomio ed eseguendo poi la somma algebrica dei quozienti parziali ottenuti.

$$(28a^5b^4c - 16a^3b^3c^2 - 4a^2b^2c^3) : -4a^2b$$

applicando la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione algebrica otteniamo:

$$28a^5b^4c : (-4a^2b) - 16a^3b^3c^2 : (-4a^2b) - 4a^2b^2c^3 : (-4a^2b)$$

da cui, ricordando come si effettua la divisione fra monomi, otteniamo:

$$-7a^3b^3c + 4ab^2c^2 + bc^3$$

Prodotti notevoli

PRODOTTO DELLA SOMMA DI DUE MONOMI PER LA LORO DIFFERENZA

Il **prodotto della somma di due monomi per la loro differenza** è uguale alla differenza tra il quadrato del primo monomio e il quadrato del secondo monomio:

$$\mathbf{(A + B)(A - B) = A^2 - B^2}$$

dove A e B indicano ciascuno un monomio qualsiasi.

$$(3a + 2b)\,(3a - 2b) =$$

$$= 9a^2 - 6ab + 6ab - 4b^2 =$$

$$= 9a^2 - 4b^2$$

Eliminati i monomi opposti si nota che il risultato non è altro che la differenza tra il quadrato del primo termine $9a^2$ e il quadrato del secondo termine $4b^2$.

Prodotti notevoli

QUADRATO DI UN BINOMIO

Il **quadrato di un binomio** si calcola addizionando algebricamente il quadrato del primo termine, il doppio prodotto del primo per il secondo termine e il quadrato del secondo termine:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$(3a + 2b)^2 = (3a + 2b)(3a + 2b) = 9a^2 + 6ab + 6ab + 4b^2 = 9a^2 + 12ab + 4b^2$

$(3a - 2b)^2 = (3a - 2b)(3a - 2b) = 9a^2 - 6ab - 6ab + 4b^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$

Il risultato è un polinomio formato dalla somma algebrica dei seguenti termini:

- quadrato del primo termine ($9a^2$);
- doppio prodotto del primo termine per il secondo ($+ 12ab$) o ($- 12ab$);
- quadrato del secondo termine ($4b^2$).

Lattes

Prodotti notevoli

CUBO DI UN BINOMIO

Il **cubo di un binomio** si calcola addizionando algebricamente il cubo del primo termine, il triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo termine, il triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo termine e il cubo del secondo termine:

$$\mathbf{(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3}$$
$$\mathbf{(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3}$$

$\mathbf{(3a + 2b)^2} = (3a + 2b)(3a + 2b)(3a + 2b) = (9a^2 + 6ab + 6ab + 4b^2)(3a + 2b) =$
$= 27a^3 + 18a^2b + 18a^2b + 12ab^2 + 18a^2b + 12ab^2 + 12ab^2 + 8b^3 = \mathbf{27a^3 + 54a^2b + 36ab^2 + 8b^3}$

$\mathbf{(3a - 2b)^2} = (3a - 2b)(3a - 2b)(3a - 2b) = (9a^2 - 6ab - 6ab + 4b^2)(3a - 2b) =$
$= 27a^3 - 18a^2b - 18a^2b + 12ab^2 - 18a^2b + 12ab^2 + 12ab^2 - 8b^3 = \mathbf{27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3}$

Il risultato è un polinomio formato dalla somma algebrica dei seguenti termini:

- cubo del primo termine ($27a^3$);
- triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo ($+ 54a^2b$ o $- 54a^2b$);
- triplo prodotto del primo termine per il quadrato del secondo ($+ 36ab^2$);
- cubo del secondo termine ($+ 8b^3$ o $- 8b^3$).