



Le potenze



Concetto di elevamento a potenza

Data la moltiplicazione di fattori tutti uguali:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$$

Questa particolare moltiplicazione si può esprimere così:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

Il simbolo 3^5 si chiama **potenza di base 3 ed esponente 5** e si legge **tre alla quinta**.

L'**elevamento a potenza** è l'operazione aritmetica che associa a due numeri, a (base) e n (esponente), un terzo numero che si ottiene moltiplicando la base per se stessa tante volte quante sono le unità dell'esponente:

$$a^n = a \times a \times \dots \times a \quad \text{con } n, a \in \mathbf{N} \text{ e con } n > 1$$

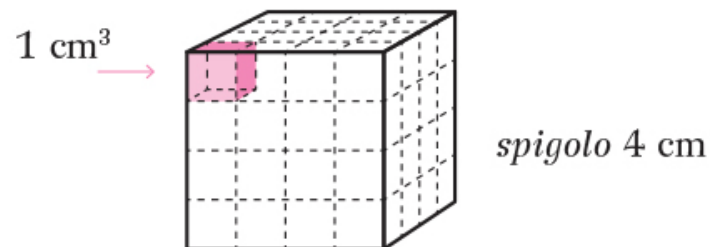
Quadrati e cubi

Le potenze di un numero con esponente 2 o 3 si dicono anche **quadrati** o **cubi** di quel numero. Infatti se calcoliamo l'area di un quadrato o il volume di un cubo avremo:



Area quadrato

$$4 \times 4 = 4^2 = 16 \text{ cm}^2$$



Volume cubo

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64 \text{ cm}^3$$

Proprietà delle potenze

POTENZE CON LA STESSA BASE

Il **prodotto** di due o più potenze aventi la stessa base è la potenza avente per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

$$4^2 \times 4^3 = (4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4) = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 4^{2+3}$$

Il **quoziente** di due potenze aventi la stessa base è la potenza avente per base la stessa base e per esponente la differenza fra gli esponenti.

$$5^5 : 5^2 = (5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5) : (5 \times 5) = 5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 5^{5-2}$$

La **potenza** di una potenza è una potenza avente per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

$$(7^3)^2 = 7^3 \times 7^3 = 7^{3+3} = 7^6 = 7^{3 \times 2}$$

Proprietà delle potenze

POTENZE CON LO STESSO ESPONENTE

Il **prodotto** di due o più potenze aventi lo stesso esponente è la potenza avente per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente:

$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3$$

Il **quoziente** di due potenze aventi lo stesso esponente è la potenza avente per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente:

$$6^3 : 3^3 = (6 : 3)^3$$

Uno e zero nell'elevamento a potenza

POTENZE CON ESPONENTE 1

Qualunque potenza con esponente 1 è uguale alla base:

$$4^3 : 4^2 = 4^{3-2} = 4^1 \quad \text{e} \quad 4^3 : 4^2 = 64 : 16 = 4$$

Quindi:

$$4^1 = 4$$

POTENZE CON ESPONENTE 0

Qualunque potenza con esponente 0 di un numero diverso da 0 è uguale a 1:

$$4^3 : 4^3 = 4^{3-3} = 4^0 \quad \text{e} \quad 4^3 : 4^3 = 64 : 64 = 1$$

Quindi:

$$4^0 = 1$$

La potenza 0^0 non ha significato.

Uno e zero nell'elevamento a potenza

POTENZE CON BASE 1

Qualunque potenza con base 1 è uguale a 1:

$$1^7 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

POTENZE CON BASE 0

Qualunque potenza con base 0 ed esponente diverso da 0 è uguale a 0:

$$0^5 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$$

Notazione scientifica e ordine di grandezza

POTENZE DI 10

Una potenza di 10 è un numero formato dalla cifra 1 seguita da tanti 0 quante sono le unità dell'esponente:

$$10^n = 1\ 000\ 000 \dots 000 \quad \text{con } n \text{ zeri}$$

Una potenza di 10 con esponente intero negativo (cioè con segno -) è un numero formato dalla cifra 0 seguita da tante cifre decimali, tutte uguali a 0 tranne l'ultima che è 1, quante ne indica l'esponente:

$$10^{-n} = 0,000\ 000 \dots 01 \quad \text{con } n \text{ cifre}$$

Notazione scientifica e ordine di grandezza

NOTAZIONE SCIENTIFICA

Le potenze di 10 ci permettono di scrivere rapidamente sotto forma di prodotto di un numero decimale per una potenza di 10, sia numeri maggiori di 1 sia numeri minori di 1.

Scriviamo il numero 4273 in notazione scientifica.

Si divide per $1000 = 10^3$

$$4273 : 1000 = 4,273$$

Si moltiplica per $1000 = 10^3$

$$4,273 \times 10^3$$

Quindi:

$$4273 = 4,273 \times 10^3$$

Scriviamo il numero 0,0035 in notazione scientifica.

Si moltiplica per $1000 = 10^3$

$$0,0035 \times 1000 = 3,5$$

Si divide per 1000 che equivale a moltiplicare per $0,001 = 10^{-3}$

Quindi:

$$0,0035 = 3,5 \times 10^{-3}$$

Notazione scientifica e ordine di grandezza

ORDINE DI GRANDEZZA

L'ordine di grandezza di un numero è **la potenza di 10 più vicina** al numero considerato.

Ecco come procedere per individuare l'ordine di grandezza.

Si scrive il numero in notazione scientifica e si considerano le potenze di 10 tra le quali il numero è compreso:

$$10^n < a \times 10^n < 10^{n+1}$$

Se $a > 5$ o $a = 5$ l'ordine di grandezza coincide con la potenza di 10 con esponente maggiore: 10^{n+1}

Se $a < 5$ l'ordine di grandezza coincide con la potenza di 10 con esponente minore: 10^n

Ad esempio:

$$10^6 < 3,57 \times 10^6 < 10^7$$

l'ordine di grandezza è 10^6 perché $3,57 < 5$

$$10^9 < 8,3 \times 10^9 < 10^{10}$$

l'ordine di grandezza è 10^{10} perché $8,3 > 5$

Scrittura polinomiale di un numero

Il nostro sistema di numerazione è **decimale** e **in base 10**, ciò significa che utilizza dieci simboli (le cifre da 0 a 9) e che 10 unità di un dato ordine formano un'unità dell'ordine immediatamente superiore.

Il sistema di numerazione decimale è di tipo **posizionale** e quindi il valore di ogni cifra dipende dalla posizione che essa occupa nel numero.

Nel numero **732**:

- la cifra **2** indica le unità e il suo valore è 2×1
- la cifra **3** indica le decine e il suo valore è 3×10
- la cifra **7** indica le centinaia e il suo valore è 7×100

Il valore del numero è quindi:

$$732 = 7 \times 100 + 3 \times 10 + 2 \times 1 = 7 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

Questo tipo di scrittura di un numero è detta **scrittura polinomiale**.