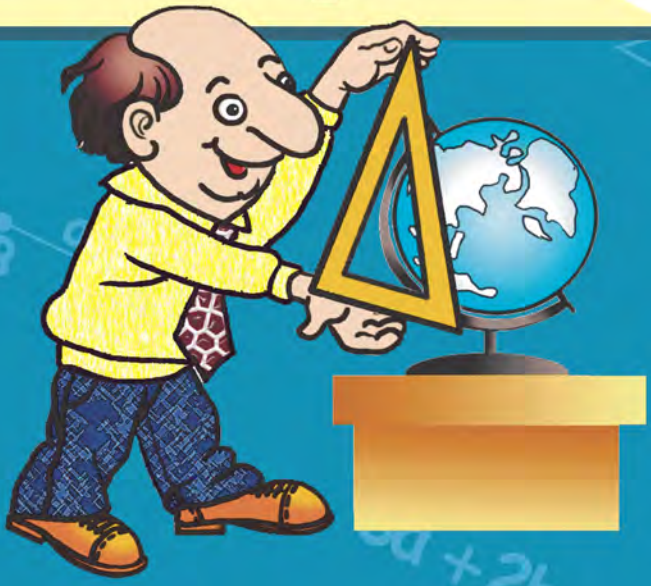
ИЗДАТЕЛЬСТВО
РАНОК

Інтернет-підтримка

А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський

Геометрія 7



- загальноосвітня програма
- допрофільна підготовка

Латинський алфавіт

Буква	Назва	Буква	Назва
Aa	а	Nn	ен
Bb	бе	Oo	о
Cc	це	Pp	пе
Dd	де	Qq	ку
Ee	е	Rr	ер
Ff	еф	Ss	ес
Gg	же, ґе	Tt	те
Hh	аш, га	Uu	у
Ii	і	Vv	ве
Jj	йот, жі	Ww	дубль-ве
Kk	ка	Xx	ікс
Ll	ель	Yy	ігрек, іпсилон
Mm	ем	Zz	зет, зета

www.e-ranok.com.ua

Грецький алфавіт

Буква	Назва	Буква	Назва
Αα	альфа	Νν	ню
Ββ	бета	Ξξ	ксі
Γγ	гамма	Οο	омікрон
Δδ	дельта	Ππ	пі
Εε	епсилон	Ρρ	ро
Ζζ	дзета	Σσ	сігма
Ηη	ета	Ττ	тау
Θθ	тета	Υυ	іпсилон
Ιι	йота	Φφ	фі
Κκ	каппа	Χχ	хі
Λλ	лямбда	Ψψ	псі
Μμ	мю	Ωω	омега

www.e-ranok.com.ua

УДК [514:37.016](075.3)
ББК 22.151.0я721
Є 80

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 20.07.2015 р. № 777)

Рецензенти:
В. Т. Лисиця, доцент кафедри вищої математики та інформатики ХНУ ім. В. Н. Каразіна, канд. фіз.-мат. наук;
І. С. Маркова, головний редактор науково-методичного журналу «Математика в школах України»;
О. М. Роганін, учитель математики вищої кваліфікаційної категорії Пісочинського колегіуму Харківської райради Харківської області, учитель-методист;
В. А. Александрова, учитель математики вищої кваліфікаційної категорії КЗО СБШ № 23 Дніпропетровської міської ради, учитель-методист

Єршова А. П.
Є 80 Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський. — Х. : Вид-во «Ранок», 2015. — 224 с. : іл.
ISBN 978-617-09-2105-5

УДК [514:37.016](075.3)
ББК 22.151.0я721

Навчальне видання
ЄРШОВА Алла Петрівна
ГОЛОБОРОДЬКО Вадим Володимирович
КРИЖАНОВСЬКИЙ Олександр Феліксович

«ГЕОМЕТРІЯ»
Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Редактор *О. В. Костіна.* Технічний редактор *О. В. Сміян.* Коректор *Н. О. Красна*
Т900468У. Підписано до друку 25.08.2015. Формат 70x90/16. Гарнітура Шкільна.
Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 16,33. Обл.-вид. арк. 19,6. Наклад 19202 прим.
ТОВ Видавництво «Ранок».
Свідоцтво ДК № 3322 від 26.11.2008. 61071 Харків, вул. Кібальчича, 27, к. 135.
Адреса редакції: 61145, Харків, вул. Космічна, 21а.
Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.
Для листів: 61045 Харків, а/с 3355. E-mail: office@ranok.com.ua
www.ranok.com.ua

Для користування електронними додатками до підручника увійдіть на сайт interactive.ranok.com.ua

Служба технічної підтримки:
тел. (098) 037-54-68
(понеділок–п'ятниця з 9:00 до 18:00)
E-mail: interactive@ranok.com.ua

© Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., 2015
© Алимова Н. В., ілюстрації, 2015
© ТОВ Видавництво «Ранок», 2015

ISBN 978-617-09-2105-5

www.e-ranok.com.ua

А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський

Геометрія

Підручник для 7 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Харків
Видавництво «Ранок»
2015

www.e-ranok.com.ua

Геометрія — це пізнання всього сущого.
Платон, давньогрецький філософ

Дорогі друзі!

Ви розпочинаєте вивчення нового математичного предмета і зі сторінок цього підручника отримаєте знання, які вже протягом багатьох століть приносять людям величезну користь. У майбутньому ці знання допоможуть і вам.

Напевне, кожний із вас коли-небудь уявляв себе великим мандрівником, який, подібно до Христофора Колумба, прокладає в бурхливому океані курс до незвіданих країн. Хтось мріяв стати славетним детективом, сучасним Шерлоком Холмсом, щоб, використовуючи стрункe логічне мислення, розв'язувати найскладніші загадки, розкривати таємниці. Хтось бачив себе можновладним єгипетським фараоном, за чиєю волею посеред пустелі споруджувалися величні піраміди. Але, мабуть, не всі ви здогадувалися, що існує наука, без якої неможливо здійснити ті мрії. Ця наука — ***геометрія***.

Чому саме геометрія? Насамперед, це одна з найдавніших математичних наук. Вона виникла ще в Стародавньому Єгипті, де щороку після розливів Нілу жителі мусили відновлювати межі земельних ділянок. Сам термін «геометрія» в перекладі з грецької означає «землемірство». Вивчати геометричні форми потрібно було не тільки землеробам, але й будівельникам, адже без геометрії не вдалося б звести жодну з єгипетських пірамід.

Геометрія як розділ математики, пов'язаний з обчисленнями та розрахунками, сприяла їхньому розвиткові. Завдяки геометрії стали можливими великі наукові відкриття, зокрема географічні. Не випадково за часів Середньовіччя геометрія належала до тих наук, які повинна була опанувати кожна освічена людина.

Зазначимо також, що геометрія — це мистецтво правильного мислення. Вивчаючи цей предмет, можна побачити, як закономірності навколишнього світу відбиваються в логічних твердженнях, із яких випливають корисні наслідки.

Протягом багатьох століть основи геометрії майже не змінювалися. Чимало тверджень, які ви будете вивчати, навіть давніші, ніж Біблія. Завдяки багатьом видатним ученим, серед яких Евклід, Піфагор, Декарт, Лобачевський, ця наука вийшла на якісно новий рівень.

Отже, щасливої подорожі! Не бійтеся ставити запитання, знаходити й застосовувати власні методи розв'язування задач. Не все виходитиме відразу, але увага й наполегливість допоможуть вам відчути справжнє задоволення від вивчення геометрії.

Бажаємо вам успіхів!

www.e-ranok.com.ua

Як користуватися підручником

Підручник має три розділи, кожний із яких складається з параграфів, а параграфи — з пунктів. У тексті міститься як теоретичний матеріал, так і приклади розв'язування задач. Найважливіші поняття й факти в підручнику виділено.

Вправи та задачі, подані в підручнику, поділяються на декілька груп.

Усні вправи допоможуть вам зрозуміти, наскільки успішно ви засвоїли теоретичний матеріал. Ці вправи не обов'язково розв'язувати подумки — ви можете виконати необхідні рисунки, обчислення, записати хід міркувань у чернетці. Після усних вправ можна переходити до ***графічних вправ***, що виконуються в зошиті або на комп'ютері. Далі йдуть ***письмові вправи***. Спочатку перевірте свої знання, виконуючи задачі ***рівня А***. Більш складними є задачі ***рівня Б***. І нарешті, якщо ви добре опанували матеріал і бажаєте виявити свої творчі здібності, на вас чекають задачі ***рівня В***.

Після кожного параграфа в рубриці ***«Повторення»*** зазначено, які саме поняття й факти слід згадати для успішного вивчення подальшого матеріалу, і наведено задачі для повторення, що підготують вас до сприйняття наступної теми. Для самостійної роботи вдома призначені задачі, номери яких позначено значком  . Розв'язувати всі задачі кожного рівня не обов'язково.

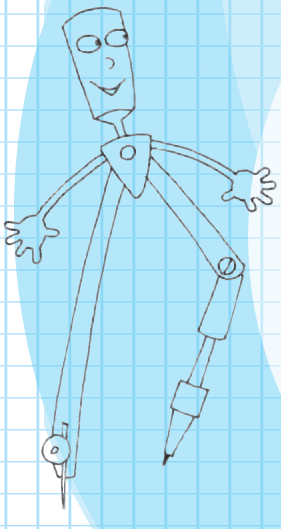
Наприкінці кожного розділу подано ***контрольні запитання*** й ***типові задачі для контрольних робіт***, завдяки яким ви зможете краще підготуватися до тематичного оцінювання. Пройшовши онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua, ви зможете самостійно перевірити рівень ваших знань. ***Додаткові задачі*** до розділів відкриють вам нові грані геометрії, допоможуть узагальнити вивчений матеріал і відчути красу нестандартного мислення. Розширити свої знання за кожним розділом ви можете, переглянувши відеоматеріали на тому самому сайті. Про можливість скористатися матеріалами сайта вам нагадуватиме значок  .

Підсумкові огляди наприкінці кожного розділу послугують своєрідним геометричним компасом і допоможуть орієнтуватись у вивченому матеріалі. ***Додатки***, наведені в кінці підручника, поглиблять ваші знання з окремих вивчених тем, а ***історичні довідки*** ознайомлять із деякими цікавими фактами щодо розвитку геометрії та діяльності видатних учених-геометрів.

www.e-ranok.com.ua

Розділ I

Елементарні геометричні фігури та їхні властивості. Взаємне розміщення прямих на площині



§ 1. Геометричні фігури. Точка, пряма, промінь

§ 2. Відрізок. Вимірювання та відкладання відрізків. Відстань між двома точками

§ 3. Кут. Вимірювання та відкладання кутів. Бісектриса кута

§ 4. Паралельні прямі

§ 5. Суміжні кути та їх властивості

§ 6. Вертикальні кути та їх властивості. Перпендикулярні прямі. Кут між двома прямими

www.e-ranok.com.ua

Геометрія — правителька всіх розумових пошуків.

Михайло Ломоносов,
російський учений

Починаючи споруджувати дім, будівельники спершу закладають фундамент — основу, на якій триматиметься майбутня споруда. Дещо подібне необхідно зробити й нам.

Ми починаємо вивчати **планіметрію** — розділ геометрії, у якому розглядаються фігури на площині. З курсу математики ви вже маєте уявлення про деякі з них. Наша найближча мета — відновити й доповнити ці початкові знання. Геометричні відомості ми будемо викладати в певній логічній послідовності, щоб вони стали міцним фундаментом для подальшого вивчення геометрії.

Основу будь-якої науки становлять твердження, що беруться як вихідні й не потребують обґрунтування. У математиці такі твердження називають **аксіомами**. Аксіоми планіметрії, які ми розглянемо в цьому розділі, відображують основні властивості елементарних геометричних фігур. На основі цих аксіом за допомогою логічних міркувань ми будемо одержувати складніші геометричні факти.

www.e-ranok.com.ua

§1 Геометричні фігури. Точка, пряма, промінь

1.1. Точка і пряма

Основними геометричними фігурами на площині є **точка** і **пряма**. Площину можна уявити як аркуш, точку — як слід, залишений голкою на цьому аркуші, а пряму — як тонку натягнуту нитку. Точки зазвичай позначають великими латинськими літерами (A, B, C, D, ...), а прямі — малими латинськими літерами (a, b, c, d, ...).

Планіметрія — від латинського «планум» — площина і грецького «метрео» — вимірюю

На рис. 1 точки A і D ***лежать на прямій*** a, а точки B і C ***не лежать на прямій*** a. Можна сказати те саме інакше: пряма a проходить через точки A і D, але не проходить через точки B і C.

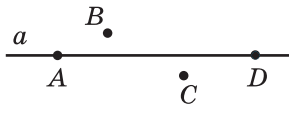


Рис. 1. Точки A і D лежать на прямій a, а точки B і C не лежать на прямій a

Пряма є нескінченною і складається з точок. На рисунках ми зображуємо лише частину прямої.

1.2. Властивості точок і прямих

Через одну точку на площині можна провести безліч прямих. Розглянемо прямі a і b, що проходять через точку C (рис. 2). У цьому випадку кажуть, що прямі a і b ***перетинаються в точці*** C, а їхня спільна точка C є ***точкою перетину прямих*** a і b.

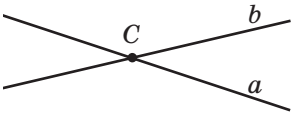


Рис. 2. Прямі a і b перетинаються в точці C

Якщо на площині позначено дві точки[1] A і B, то за допомогою лінійки через них можна провести пряму c (рис. 3). Зазначимо, що через точки A і B неможливо провести іншу пряму, яка не збігалася б із прямою c.



Рис. 3. Пряма c проходить через точки A і B

[1] Тут і далі, кажучи «дві точки» («дві прямі», «три точки» тощо), вважаємо, що ці точки (прямі) є різними.

www.e-ranok.com.ua

Аксіома — від грецького «аксіос» — загальноприйнятий, безперечний, який не викликає сумніву

Цю властивість називають аксіомою проведення прямої.

Аксіома проведення прямої

Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Із цього випливає, що дві прямі не можуть мати дві чи більше спільних точок: вони або мають одну спільну точку, або не мають спільних точок узагалі. Пряму з вибраними на ній двома точками можна позначати великими літерами, якими названо ці точки. Так, пряму на рис. 3 можна назвати прямою AB або прямою BA.

Через три точки площини не завжди можна провести пряму. Так, на рис. 1 не можна провести пряму через точки A, B, D.

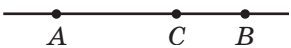


Рис. 4. Точка C лежить між точками A і B

На рис. 4 точки A, B, C лежать на одній прямій, причому точка C ***лежить між точками*** A і B. Можна також сказати, що точки A і B ***лежать по різні боки*** від точки C.

Точки B і C ***лежать по один бік*** від точки A, а точки A і C ***лежать по один бік*** від точки B.

Аксіома розміщення точок на прямій

Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

1.3. Промінь



Рис. 5. Точка A ділить пряму a на два промені AA_1 і AA_2

Будь-яка точка ділить пряму на дві частини (рис. 5). Кожну з цих частин можна умовно вважати половиною прямої, тому утворені частини прямої дістали назву «півпрямі», або інакше — промені.

www.e-ranok.com.ua

Променем (або **півпрямою**) називається частина прямої, що складається з усіх точок цієї прямої, які лежать по один бік від деякої даної на ній точки, а також самої цієї точки. Дана точка називається **початковою точкою** (або **початком**) **променя**.

На рис. 5 точка A — початкова точка двох променів прямої a. Промені, як і прямі, можна позначати малими латинськими літерами або за двома точками: початковою (обов'язково на першому місці!) і ще будь-якою точкою цього променя.

Так, промінь на рис. 6 можна позначити b або BC, але не можна позначити CB.

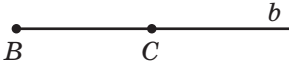


Рис. 6. Промінь BC

Два різні промені однієї прямої зі спільною початковою точкою називаються **доповняльними променями**.

На рис. 5 AA_1 і AA_2 — доповняльні промені. Вони доповнюють один одного до прямої a і мають тільки одну спільну точку — їхній початок.

Задача

На прямій точка C лежить між точками A і B. Чи можуть промені AB і AC бути доповняльними? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання

Нехай A, B і C — дані точки (рис. 7). Оскільки точка C лежить між точками A і B, то точки C і B лежать по один бік від точки A, отже, вони належать одному променю з початком A. Цей промінь можна назвати AB або AC. Таким чином, дані промені збігаються, тому вони не є доповняльними.

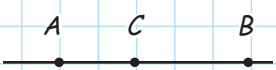


Рис. 7

Відповідь: не можуть.

www.e-ranok.com.ua

1.4. Означення і його роль у геометрії

У п. 1.3 описано два поняття: «промінь», яке відоме вам із курсу математики 5 класу, і нове — «доповняльні промені». Завдяки цим описам можна чітко уявити, які саме фігури розглядаються. Наведені описи є **означеннями**; вони вказують на особливості описаної фігури, що відрізняють її від інших фігур.

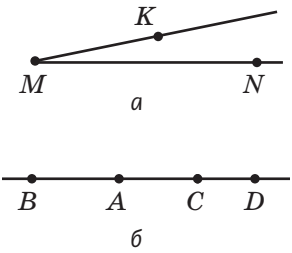


Рис. 8. До пояснення поняття «доповняльні промені»:
а) промені MN і MK не є доповняльними;
б) промені AB і CD не є доповняльними

Прочитаємо ще раз означення доповняльних променів. Якщо в ньому пропустити лише слова «однієї прямої», то промені MN і MK на рис. 8, *а* доведеться вважати доповняльними. Коли ж не уточнити, що доповняльні промені повинні мати спільний початок, то промені AB і CD на рис. 8, *б* теж слід назвати доповняльними. Таким чином, ці змінені означення не описуватимуть той об'єкт, який ми маємо на увазі.

Це свідчить про те, як важливо приділяти увагу кожному слову в означенні: тільки так можна по-справжньому зрозуміти геометрію.

Запитання і задачі

Усні вправи

1. На прямій AB позначено точку C. Чи лежить точка A на прямій BC? Чи лежить точка B на прямій AC?

2. Точка A лежить на прямій c, а точка B не лежить на прямій c. Чи перетинаються прямі c і AB? Якщо так, то назвіть точку їхнього перетину.

3. Через точку A проведено дві прямі. Чи можуть ці прямі мати спільну точку B, відмінну від точки A?

4. Точка B лежить на прямій між точками A і C. Як розміщені точки B і C відносно точки A?

www.e-ranok.com.ua

5. На прямій позначено точки K, L, M, N (рис. 9).



Рис. 9

Серед позначених точок назвіть:

а) точку, що лежить між точками L і N;

б) точки, що лежать між точками K і N;

в) дві точки, що лежать по один бік від точки L;

г) точку, по різні боки від якої лежать точки K і M.

6. На промені AB позначено точку C. Чи може точка A лежати між точками B і C? Чи може точка B лежати між точками A і C?

7. Промені DE і DF — доповняльні. Яка з точок D, E і F лежить між двома іншими?

8. Два промені мають спільну початкову точку. Чи обов'язково вони є доповняльними?

Графічні вправи

9. Проведіть пряму.

а) Позначте точки A і B, що лежать на цій прямій, і точки C і D, що не лежать на ній. Як можна позначити цю пряму?

б) Проведіть ще одну пряму через точки A і C. Скільки спільних точок мають побудовані прямі?

10. Позначте точку A.

а) Проведіть промінь із початком A і позначте на ньому точку B. Назвіть пряму, частиною якої є промінь AB.

б) Проведіть промінь із початком B, що не проходить через точку A. Чи можна назвати побудований промінь BA?

Письмові вправи

Рівень А

11. Позначте точки B і C. Проведіть через них пряму. Проведіть ще одну пряму так, щоб вона проходила через точку B, але не проходила через точку C. Скільки спільних точок мають ці прямі?

12. Позначте дві точки й від руки проведіть через них пряму. Перевірте правильність побудови за допомогою лінійки. Якою аксіомою ви скористалися?

www.e-ranok.com.ua

13. На прямій точки E і F лежать по різні боки від точки D. Як розміщені точки D і F відносно точки E? Чи може точка F лежати між точками D і E?

14. Точки M і N лежать на прямій по один бік від точки K. Яка з цих трьох точок не може лежати між двома іншими? Відповідь обґрунтуйте.

15. Позначте точки A і B. Проведіть промінь AB. Чи є доповняльними промені AB і BA?

16. На прямій позначено дві точки. Скільки пар доповняльних променів при цьому утворилося?

17. Побудуйте доповняльні промені PQ і PR. Назвіть точки, що лежать по один бік від точки R. Чи лежить точка Q на промені RP?

Рівень Б

18. Дано чотири точки, причому ніякі три з них не лежать на одній прямій. Через кожні дві з даних точок проведено пряму. Скільки всього прямих проведено?

19. Точки A, B, C лежать на одній прямій, а точка D не лежить на цій прямій. Через кожні дві з даних точок проведено пряму. Скільки всього прямих проведено?

20. На шляху з Дніпропетровська до Харкова автомобіль проїжджає Красноград, а на шляху з Краснограда до Дніпропетровська — Перещепине. Яке з цих міст розташоване на шляху з Харкова до Перещепиного?

21. На прямій позначено точки X, Y, Z, причому точки X і Y лежать по один бік від точки Z, а точки X і Z — по один бік від точки Y. Яка з трьох точок лежить між двома іншими?

22. Точка C лежить на промені AB, а точка B — на промені CA. Яка з цих трьох точок лежить між двома іншими?

23. Точки A, B і C лежать на одній прямій, причому промені AB і AC не є доповняльними, а точки A і C лежать по один бік від точки B. Яка з цих трьох точок лежить між двома іншими?

24. Чи можуть два промені однієї прямої не бути доповняльними? Зробіть рисунок.

25. Два промені мають єдину спільну точку. Чи є такі промені доповняльними? Зробіть рисунки.

www.e-ranok.com.ua

Рівень В

26. Скільки прямих трас необхідно прокласти, щоб сполучити будь-які два з чотирьох міст? Розгляньте всі можливі випадки. Зробіть рисунки.

27. Дано три прямі, причому будь-які дві з них перетинаються. Скільки точок перетину може утворитися? Розгляньте всі можливі випадки. Зробіть рисунки.

28. Як мають бути розміщені на площині n точок, щоб вони визначали рівно n прямих, якщо $n > 2$?

29. На прямій позначено точки A, B і C. Скільки різних променів можна назвати за допомогою цих точок? Скільки серед цих променів пар доповняльних променів? Чи зміниться відповідь, якщо дані точки не лежать на одній прямій?

Повторення перед вивченням § 2

Теоретичний матеріал

5 клас

- пряма та відрізок
- побудова і вимірювання відрізків

Задачі

30. На прямій точка B лежить між точками A і C. Чи існує на цій прямій точка, що лежить між точками:

а) A і B, але не лежить між точками A і C;

б) A і C, але не лежить між точками A і B?

31. На прямій позначено п'ять точок. Визначте, які з наведених тверджень є правильними:

а) будь-які три з даних точок лежать між двома іншими;

б) серед даних точок знайдуться три, що лежать між двома іншими;

в) серед даних точок існує принаймні одна, що не лежить між двома з решти цих точок;

г) серед даних точок існує рівно одна, що не лежить між двома з решти цих точок.

www.e-ranok.com.ua

§2 Відрізок. Вимірювання та відкладання відрізків. Відстань між двома точками

2.1. Означення відрізка

Будь-який промінь є частиною прямої, «обмеженою» з одного боку початковою точкою. Розглянемо тепер відрізок — частину прямої, «обмежену» точками з обох боків.

Означення

Відрізком називається частина прямої, що складається з двох даних точок цієї прямої (**кінців відрізка**) й усіх точок, що лежать між ними.



Рис. 10. Відрізок AB — частина прямої AB

Відрізок позначають, записуючи його кінці в довільному порядку. Так, відрізок на рис. 10 можна назвати «відрізок AB» або «відрізок BA». Очевидно, що відрізок AB є частиною прямої AB. При цьому слід розрізняти, йдеться про пряму AB чи про відрізок AB.

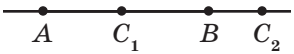


Рис. 11. Точка C_1 лежить на відрізку AB, точка C_2 не лежить на відрізку AB

Якщо розглянути разом із точками A і B якусь іншу точку прямої, то, відповідно до аксіоми розміщення точок на прямій, вона або лежить між точками A і B, тобто належить відрізку AB (на рис. 11 такою точкою є C_1), або не лежить між точками A і B, тобто не належить відрізку AB (на рис. 11 такою точкою є C_2).

2.2. Рівність відрізків. Середина відрізка

Означення

Два відрізки називаються **рівними**, якщо вони суміщаються накладанням.

www.e-ranok.com.ua

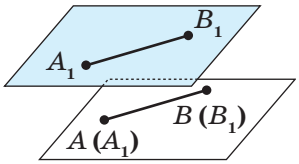


Рис. 12. Відрізки AB і A_1B_1 суміщаються накладанням

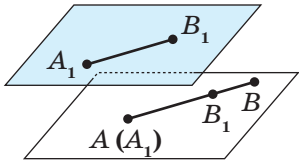


Рис. 13. Відрізки AB і A_1B_1 не суміщаються накладанням

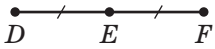


Рис. 14. Точка E — середина відрізка DF

Нанесемо відрізок A_1B_1 на прозору плівку й накладемо його на відрізок AB так, щоб точка A_1 збіглася з точкою A і ці відрізки мали інші спільні точки. Якщо точка B_1 суміститься з точкою B (рис. 12), то відрізки AB і A_1B_1 є рівними (пишуть так: $AB = A_1B_1$). Якщо ж точки B і B_1 не сумістяться, то меншим із двох відрізків є той, який становить частину другого.

На рис. 13 точка B_1 сумістилася з деякою точкою відрізка AB, відмінною від точки B, тому відрізок AB більший, ніж відрізок A_1B_1. Коротко це позначають так: $AB > A_1B_1$.

Означення

Серединою відрізка називається точка відрізка, що ділить його навпіл (тобто на два рівні відрізки).

На рис. 14 відрізки DE і EF рівні, тобто точка E — середина відрізка DF. Зазвичай на рисунках рівні відрізки позначають однаковою кількістю рисок.

2.3. Вимірювання та відкладання відрізків

Важливою властивістю відрізка є його довжина. Вона виражається додатним числом, що може бути визначене порівнянням даного відрізка з відрізком, прийнятим за одиницю вимірювання,— одиничним відрізком. За одиничний можна обрати будь-який відрізок. На практиці обирають одиничні відрізки завдовжки 1 мм, 1 см, 1 м тощо.

www.e-ranok.com.ua

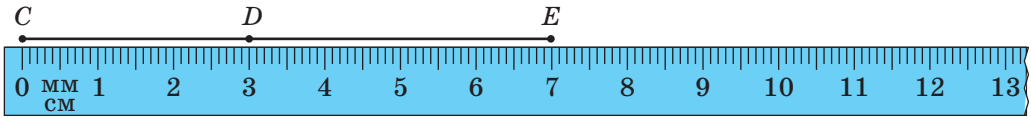


Рис. 15. Вимірювання відрізка за допомогою лінійки

Наприклад, на вимірювальній лінійці, якою ми зазвичай користуємося, малі поділки задають одиничні відрізки завдовжки 1 міліметр, а великі — завдовжки 1 сантиметр (рис. 15).

Прикладаючи лінійку до даного відрізка, ми визначаємо **довжину відрізка**. Число, що виражає довжину відрізка, залежить від одиниці вимірювання.

На рис. 15 довжина відрізка CE дорівнює 70 мм, або 7 см, або 0,07 м тощо. Довжина відрізка CD дорівнює 3 см, а відрізка DE — 4 см. Можна сказати, що відрізок CE складається з двох частин — відрізків CD і DE. Точка D лежить між точками C і E, а довжина відрізка CE дорівнює сумі довжин відрізків CD і DE (пишуть так: $CD + DE = CE$).

Сформулюємо аксіоми вимірювання та відкладання відрізків.

Аксіома вимірювання відрізків

Кожний відрізок має певну довжину, що виражається додатним числом у заданих одиницях вимірювання. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які відрізок ділиться будь-якою його точкою.

Аксіома відкладання відрізків

На будь-якому промені від його початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини, і тільки один.

Очевидно, що вимірювання відрізків полягає в послідовному накладанні на заданий відрізок певної кількості одиничних відрізків. Тому ***рівні відрізки мають рівні довжини, а більший відрізок має більшу довжину***. Справджується й інше твердження: ***якщо відрізки мають рівні довжини, то вони рівні, а більшим із двох відрізків є той, який має більшу довжину***. Таким чином, для порівняння відрізків можна порівняти їхні довжини.

www.e-ranok.com.ua

Довжину відрізка AB називають також **відстанню між точками** A і B. Часто, кажучи «відрізок AB», ми маємо на увазі його довжину.

Задача

На промені AB позначено точку C, причому $AB = 12$ см, $BC = 7$ см. Знайдіть довжину відрізка AC.

Розв'язання

Розглянемо два випадки розміщення точки C на промені AB.

1. Точка C не лежить на відрізку AB (рис. 16, а). Тоді точка B лежить на відрізку AC. За аксіомою вимірювання відрізків $AC = AB + BC$, тобто $AC = 12 + 7 = 19$ (см).
2. Точка C лежить на відрізку AB (рис. 16, б). Тоді $AB = AC + BC$, тобто $12 = AC + 7$. Таким чином, $AC = 12 - 7 = 5$ (см).

Відповідь: 19 см або 5 см.

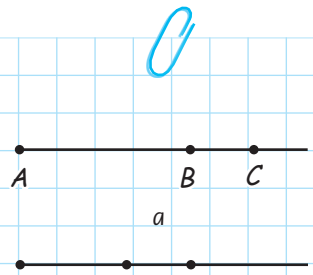


Рис. 16

Запитання і задачі

Усні вправи

32. На прямій позначено три точки. Скільки відрізків при цьому утворилося?

33. На прямій точка A лежить між точками B і C. Який із відрізків з кінцями в цих точках є найбільшим?

34. Якщо точка C лежить на відрізку AB, то вона лежить і на промені AB. Чи є правильним таке твердження?

35. Якщо точка C лежить на промені AB, то вона обов'язково лежить і на відрізку AB. Чи є правильним таке твердження?

36. Чи можна розбити пряму на відрізок і два промені? Якщо так, то чи можуть отримані промені бути доповняльними?

www.e-ranok.com.ua

37. Точки A, B і C лежать на одній прямій. Відрізок AB більший, ніж відрізок AC. Чи може точка C лежати між точками A і B? Чи може точка A лежати між точками B і C?

38. Відрізки AB і BC рівні й лежать на одній прямій. Яка з точок A, B, C лежить між двома іншими?

Графічні вправи

39. Проведіть промінь із початком у точці A.

а) На цьому промені відкладіть відрізок AB, що дорівнює 6 см, і позначте на цьому відрізку точку C.

б) Виміряйте довжину відрізка AC.

в) Обчисліть довжину відрізка CB. Перевірте отриманий результат вимірюванням.

40. Проведіть промінь із початком у точці C.

а) На цьому промені відкладіть відрізок CD, що дорівнює 4 см.

б) Побудуйте точку E так, щоб точка D була серединою відрізка CE. Якою є довжина відрізка CE?

Письмові вправи

Рівень А

41. На прямій точка M лежить між точками K і N. Знайдіть довжину відрізка:

а) KN, якщо $KM = 2{,}9$ см, $MN = 4{,}1$ см;

б) MN, якщо $KN = 8{,}3$ см, $KM = 5{,}8$ см.

42. Точки B і C лежать на відрізку AD, який дорівнює 10 см. Знайдіть довжину відрізка BC, якщо $AB = 2{,}4$ см, $CD = 3{,}6$ см.

43. На відрізку MN позначено точки P і R так, що $MP = PR = RN$. Зробіть рисунок. Які ще рівні відрізки з кінцями в даних точках утворилися на рисунку?

44. На прямій точка B лежить між точками A і C. Які з відрізків із кінцями в цих точках можуть бути рівними? Відповідь обґрунтуйте.

45. На промені з початком A позначено точки B і C так, що $AB = 6{,}4$ см, $BC = 2{,}6$ см. Якою може бути довжина відрізка AC? Розгляньте два можливі випадки розміщення точок на промені.

www.e-ranok.com.ua

46. На промені CD позначено точку E. Знайдіть довжину відрізка CE, якщо $CD = 8$ м, $DE = 6{,}2$ м. Скільки розв'язків має задача?

47. На прямій позначено точки P, R і S, причому $PR < PS < RS$. Яка з цих трьох точок лежить між двома іншими? Відповідь обґрунтуйте.

Рівень Б

48. На прямій точка M лежить між точками K і N. Знайдіть довжини відрізків:

а) KM і MN, якщо $KN = 24$ см, а відрізок KM більший, ніж відрізок MN, на 8 см;

б) KM і KN, якщо $MN = 9$ см, а $KN : KM = 7 : 4$.

49. Точки B і C лежать на відрізку AD. Знайдіть довжину відрізка BC, якщо $AD = 10$ см, $AB = 6{,}8$ см, $CD = 8{,}3$ см.

50. На відрізку MN позначено точки A і B так, що $MA = 7$ мм, $AB = 4{,}3$ мм, $BN = 5{,}1$ мм. Знайдіть довжину відрізка MN. Розгляньте всі можливі випадки.

51. На промені з початком A позначено точки B, C і D, причому $AB = 4$ см, $BC = 5{,}2$ см, $CD = 2{,}4$ см. Якою може бути довжина відрізка AD? Розгляньте всі можливі випадки.

52. Точка C — середина відрізка AB, а точка D — середина відрізка AC. Знайдіть довжину відрізка:

а) BD, якщо $AC = 16$ см;

б) AB, якщо $BD = 12$ см.

53. На прямій позначено точки M, N і K, причому відрізок MN більший, ніж NK, а відрізок NK не є найменшим серед утворених відрізків. Який з отриманих відрізків найменший? Відповідь обґрунтуйте.

54. Точки A, B і C лежать на одній прямій. Назвіть найбільший із відрізків з кінцями в цих точках, якщо точка C лежить на промені AB, а точка B — на промені CA. Відповідь обґрунтуйте.

Рівень В

55. На прямій позначено точки A і B, відстань між якими становить 6 см. Опишіть розміщення на цій прямій усіх точок M таких, що:

а) $AM + MB = 8$ см;

б) $AM + MB = 6$ см;

в) $AM = 2MB$.

www.e-ranok.com.ua

56. Відрізок поділений трьома точками на чотири частини, кожна з яких дорівнює a. Скільки при цьому утворилося рівних відрізків, довжина яких не дорівнює a? Визначте їхні довжини.

57. Точка C лежить на відрізку AB. Доведіть, що відстань між серединами відрізків AC і CB не залежить від розміщення точки C. Знайдіть цю відстань, якщо $AB = 20$ см.

58. Точка C лежить на відрізку AB. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо відстань між серединами відрізків AC і CB дорівнює 5 см.

59. Відрізки AB і CD лежать на одній прямій. Доведіть, що коли вони мають спільну середину, то $AC = BD$.

60. На прямій позначено точки A, B, C і D, причому $AB = CD$. Чи утворилися при цьому інші рівні відрізки з кінцями в цих точках? Якщо так, то доведіть їхню рівність.

Повторення перед вивченням § 3

Теоретичний матеріал

5 клас

- кут
- побудова й вимірювання кутів

Задачі

61. З точки A проведено промені AB і AC, що не є доповняльними. Чи обов'язково ці промені збігатимуться?

62. Відрізки BD і DK мають єдину спільну точку D.

а) Чи обов'язково точка D лежить між точками B і K?

б) Чи може якась пряма, що не проходить через точку D, перетинати обидва ці відрізки?

www.e-ranok.com.ua

§3 Кут. Вимірювання та відкладання кутів. Бісектриса кута

3.1. Означення кута

Вивчаючи доповняльні промені, ми розглядали випадок, коли дві півпрямі однієї прямої мають спільну початкову точку. Розглянемо тепер той випадок, коли дві півпрямі мають спільну початкову точку, але не обов'язково є півпрямими однієї прямої.

Означення

Кутом називається геометрична фігура, що складається з двох променів **(сторін кута)**, які виходять з однієї точки **(вершини кута)**.

Для позначення кутів використовують знак $\angle$. На рис. 17, *а* зображено кут із вершиною B, сторонами якого є промені a і b (або BA і BC). Цей кут можна позначити одним із таких способів: $\angle B$, $\angle ABC$, $\angle CBA$, $\angle(ab)$, $\angle(ba)$. Якщо кут позначають за вершиною та двома точками на сторонах, то вершину обов'язково вказують на другому місці. Іноді кути позначають грецькими літерами (α, β, γ, ...) (рис. 17, *б*) або числами (рис. 17, *в*).

Сторони кута ділять площину на дві частини, кожну з яких можна вважати ***внутрішньою областю кута***. В 7 класі будемо розглядати лише ту, яка повністю містить будь-який відрізок із кінцями на сторонах кута (на рис. 17, *а* її заштриховано). Промінь, що виходить із вершини кута і проходить у його внутрішній області, ***ділить цей кут на два кути***. На рис. 18 промінь BD ділить кут ABC на кути ABD і DBC.

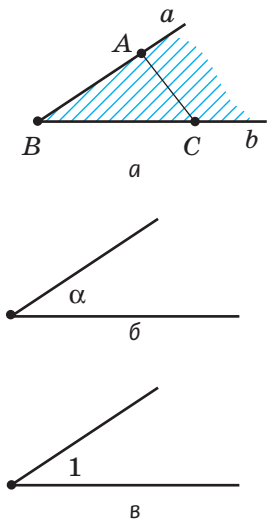


Рис. 17. Позначення кута

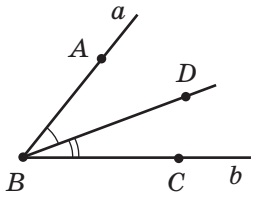


Рис. 18. Промінь BD ділить кут ABC на два кути

www.e-ranok.com.ua

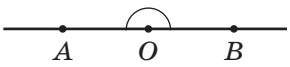


Рис. 19. Розгорнутий кут AOB

Означення

Розгорнутим кутом називається кут, сторони якого є доповняльними півпрямими.

На рис. 19 зображено розгорнутий кут AOB.

Пряма AB ділить площину на дві частини, кожну з яких можна вважати внутрішньою областю розгорнутого кута AOB. Домовимося ту з частин, яку ми розглядаємо як внутрішню, позначати дужкою.

3.2. Рівність кутів. Бісектриса кута

Означення

Два кути називаються **рівними**, якщо вони суміщаються накладанням.

Бісектриса — від латинського «біс» — двічі й «секто» — розтинаю — та, що розтинає надвоє

На рис. 20 зображено кути 1 і 2. Накладемо кут 1 на кут 2 так, щоб їхні вершини збіглися, сторона першого кута сумістилася зі стороною другого, а внутрішні області цих кутів були розміщені по один бік від прямої, на якій лежать сторони, що сумістилися. Якщо другі сторони цих кутів також сумістяться, то кути 1 і 2 є рівними (пишуть так: $\angle 1 = \angle 2$).

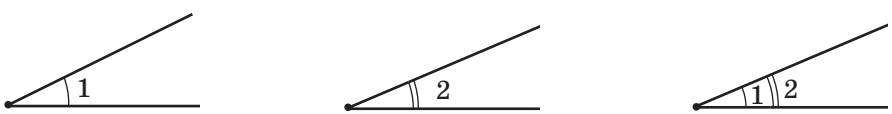


Рис. 20. Кути 1 і 2 суміщаються накладанням

www.e-ranok.com.ua

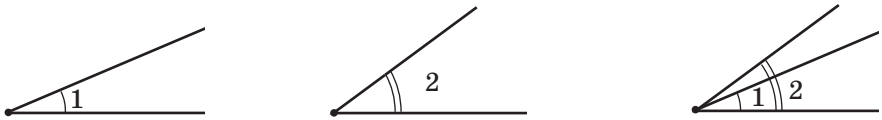


Рис. 21. Кути 1 і 2 не суміщаються накладанням

Якщо ж ці сторони не сумістяться, то меншим вважається той кут, сторона якого належить внутрішній області другого кута. На рис. 21 кут 1 є частиною кута 2, тобто він менший, ніж кут 2 (пишуть так: $\angle 1 < \angle 2$).

Означення

Бісектрисою кута називається промінь, що виходить із вершини кута й ділить кут навпіл (тобто на два рівні кути).

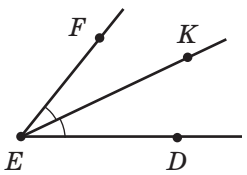


Рис. 22. Промінь EK — бісектриса кута DEF

На рис. 22 кути DEK і KEF є рівними, тому промінь EK — бісектриса кута DEF. Зазвичай на рисунках рівні кути позначають однаковою кількістю дужок.

3.3. Вимірювання та відкладання кутів

Вимірювання кутів має багато спільного з вимірюванням відрізків. Величина відрізка кількісно виражається мірою (довжиною) відрізка, а величина кута — мірою кута. Міра кута виражається додатним числом. Це число можна визначити вимірюванням, що ґрунтується на порівнянні даного кута з кутом, прийнятим за одиницю вимірювання.

Зазвичай такою одиницею є 1 градус (позначається 1°) — кут, що дорівнює $\frac{1}{180}$ частини

Градус — від латинського «градус» — крок. Стародавні вавилоняни вважали, що сонячний диск на денному шляху «робить 180 кроків»

www.e-ranok.com.ua

розгорнутого кута. **Градусна міра кута** вказує, скільки кутів завбільшки $1°$ та їхніх частин міститься в цьому куті. Для вимірювання кутів зазвичай використовують транспортир, поділки якого задають міру кута в градусах (рис. 23)[1].

Сформулюймо аксіоми вимірювання та відкладання кутів.

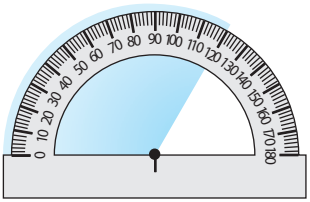


Рис. 23. Вимірювання кута за допомогою транспортира

Аксіома вимірювання кутів

Кожний кут має градусну міру, що виражається додатним числом. Розгорнутий кут дорівнює $180°$.

Якщо промінь ділить даний кут на два кути, то градусна міра даного кута дорівнює сумі градусних мір двох отриманих кутів.

Аксіома відкладання кутів

Від будь-якого променя даної прямої можна відкласти в заданий бік від прямої кут із заданою градусною мірою, меншою за $180°$, і тільки один.

Так, на рис. 18 градусна міра кута ABC дорівнює сумі градусних мір кутів ABD і DBC (це твердження можна записати у вигляді рівності: $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$). Часто, кажучи «кут ABC», ми маємо на увазі градусну міру цього кута.

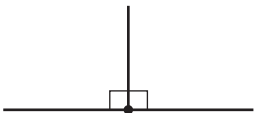
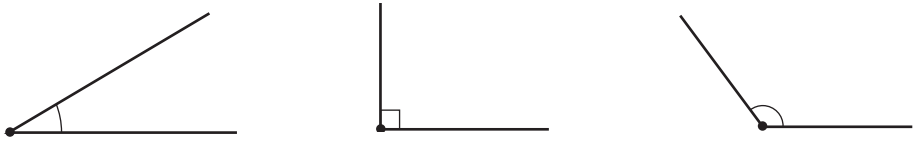


Рис. 24. Бісектриса ділить розгорнутий кут на два прямі кути

Бісектриса розгорнутого кута ділить його на два кути, кожний із яких дорівнює $90°$ (рис. 24). Такі кути називаються **прямими**. На відміну від інших кутів, позначуваних дужками, прямий кут на рисунках позначають так: $\neg$.

[1] У 7 класі ми будемо розглядати кути, градусна міра яких не перевищує $180°$. Для більш точних вимірювань використовуються 1 мінута (позначається $1'$) — $\frac{1}{60}$ частина градуса і 1 секунда (позначається $1''$) — $\frac{1}{60}$ частина мінути.

www.e-ranok.com.ua



Гострий Прямий Тупий

Рис. 25. Види нерозгорнутих кутів

Загалом, нерозгорнуті кути поділяються на три види (рис. 25):

- **гострі кути**, менші за $90°$;
- **прямі кути**, що дорівнюють $90°$;
- **тупі кути**, більші за $90°$, але менші за $180°$.

На практиці для побудови кутів використовують транспортир. Для побудови прямих кутів часто користуються косинцем.

Вимірювання кутів можна вважати послідовним накладанням на даний кут певного (не обов'язково цілого) числа кутів, що дорівнюють $1°$. Тому ***рівні кути мають рівні градусні міри, а більший кут має більшу градусну міру.*** Правильним є й інше твердження: ***якщо кути мають рівні градусні міри, то вони рівні, а з двох кутів більшим є той, який має більшу градусну міру.*** Таким чином, для порівняння двох кутів достатньо порівняти їхні градусні міри.

Задача

Промінь b ділить кут (ac), що дорівнює $120°$, на два кути, один із яких є втричі меншим, ніж кут (ac). Знайдіть ці кути.

Розв'язання

Нехай кут (ab) утричі менший, ніж кут (ac). Тоді $\angle(ab) = 120° : 3 = 40°$. Відповідно до аксіоми вимірювання кутів, якщо промінь b ділить кут (ac) на два кути, то їхня сума дорівнює даному куту: $\angle(ac) = \angle(ab) + \angle(bc)$. Тоді $\angle(bc) = \angle(ac) - \angle(ab)$; $\angle(bc) = 120° - 40° = 80°$.

Відповідь: $40°$, $80°$.

www.e-ranok.com.ua

3.4. Аналогія в геометрії

Іноді в ході розв'язування задач про властивості відрізків і кутів застосовуються одні й ті самі методи й підходи. Це пояснюється схожістю деяких властивостей цих фігур. Така схожість у науці називається **аналогією**.

Пояснимо суть аналогії на прикладі двох задач.

Задача 1

На відрізку AB, який дорівнює 20 см, позначено точку C. Знайдіть відстань між серединами відрізків AC і CB.

Задача 2

Промінь c ділить кут (ab), що дорівнює 140°, на два кути. Знайдіть кут між бісектрисами кутів (ac) і (cb).

На перший погляд, перед нами зовсім різні задачі, адже в одній ідеться про відрізки, а в другій — про кути. Однак в обох задачах дано певне «ціле», поділене на частини. Крім того, поняття середини відрізка і бісектриси кута пов'язані з поділом цілого навпіл, і в обох задачах нам необхідно знайти суму половин кожної з частин фігури.

Розв'язання

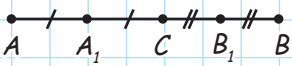


Рис. 26

Нехай точка C належить відрізку AB, точки A_1 і B_1 — середини відрізків AC і CB відповідно (рис. 26).

Тоді $A_1C = \frac{1}{2}AC$, $CB_1 = \frac{1}{2}CB$.

Знайдемо довжину відрізка A_1B_1:

$A_1B_1 = A_1C + CB_1 = \frac{1}{2}(AC + CB) = \frac{1}{2}AB$.

Розв'язання

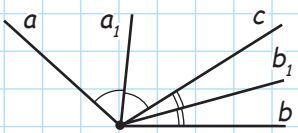


Рис. 27

Нехай промінь c ділить кут (ab) на два кути, промені a_1 і b_1 — бісектриси кутів (ac) і (cb) відповідно (рис. 27).

Тоді $\angle(a_1c) = \frac{1}{2}\angle(ac), \angle(cb_1) = \frac{1}{2}\angle(cb)$.

www.e-ranok.com.ua

Оскільки за умовою задачі AB = = 20 см, маємо: $A_1B_1 = \frac{20}{2} = 10$ см.

Відповідь: 10 см.

Знайдемо градусну міру кута (a_1b_1):

$\angle (a_1b_1) = \angle (a_1c) + \angle (cb_1) = \frac{1}{2}(\angle (ac) + \angle (cb)) = \frac{1}{2} \angle (ab)$.

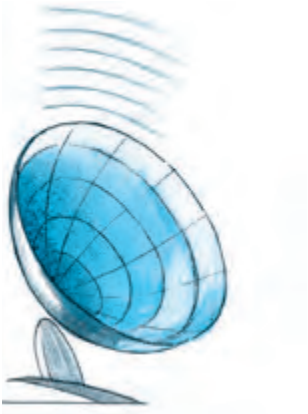
Оскільки за умовою задачі $\angle (ab) = 140°$, маємо: $\angle (a_1b_1) = \frac{140°}{2} = 70°$.

Відповідь: 70°.

Як бачимо, в основі обох розв'язань лежить спільна ідея. Знайшовши її під час розв'язування першої задачі, ми можемо застосувати основні етапи міркувань і до умов другої задачі, тобто розв'язати її *аналогічно*.

Міркування за аналогією доволі часто застосовуються й в інших науках. Наприклад, біологи з'ясували, що кажан у польоті випускає ультразвукові коливання і, сприймаючи коливання, відбиті від перешкоди, орієнтується за цими сигналами в темряві. За аналогічним принципом вчені створили радіолокатор, що визначає місце розташування об'єктів у будь-яких погодних умовах. Проте аналогія в науці не завжди дає бажаний результат: протягом багатьох століть людина намагалася злетіти в небо за допомогою штучних крил, аналогічних пташиним, але ті спроби були марними. І тільки більш ґрунтовні наукові дослідження привели до створення дельтапланів, літаків та інших літальних апаратів, за допомогою яких людина здійнялась у повітря. Видатний німецький астроном і математик Йоганн Кеплер вважав аналогії «своїми вірними вчителями» й підкреслював, що «аналогіями найменше слід нехтувати в геометрії». Однак при цьому необхідно зважати, що аналогія, корисна як спосіб міркувань, сама по собі не може бути доказом якихнебудь властивостей геометричних фігур.





www.e-ranok.com.ua

Запитання і задачі

Усні вправи

63. Точки A, B і C не лежать на одній прямій. Чи може кут ABC бути розгорнутим?

64. Визначте, яким (гострим, прямим, тупим чи розгорнутим) є кут, який утворюють стрілки годинника о 3 годині; о 8 годині; об 11 годині; о 6 годині.

65. Назвіть градусну міру кута, на який повертається:

а) хвилинна стрілка годинника протягом 15 хвилин; 30 хвилин; 10 хвилин;

б) годинна стрілка годинника протягом 3 годин; 1 години; 30 хвилин.

66. Промінь l ділить кут (mn) на два кути. Порівняйте кути (ml) і (mn).

67. На рис. 28 назвіть усі гострі кути; усі прямі кути; усі тупі кути.

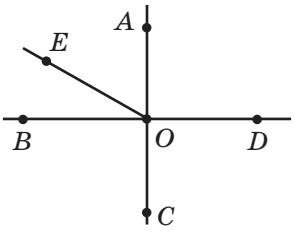


Рис. 28

68. Чи може сума градусних мір двох гострих кутів:

а) бути меншою за градусну міру прямого кута;

б) дорівнювати градусній мірі прямого кута;

в) бути більшою за градусну міру прямого кута;

г) бути більшою за градусну міру розгорнутого кута?

69. Промінь b — бісектриса нерозгорнутого кута (ac). Чи може кут (ab) бути прямим; тупим?

Графічні вправи

70. Накресліть кут ABC, що дорівнює $100°$.

а) Проведіть бісектрису BD цього кута. Якою є градусна міра кута DBC?

б) Перегніть рисунок по прямій BD. Чи збігаються промені BA і BC? Як це пояснити?

www.e-ranok.com.ua

71. Накресліть на окремому аркуші гострий кут (ab) і проведіть із його вершини промінь c, що ділить цей кут на два кути.

а) За допомогою транспортира виміряйте всі утворені кути й порівняйте градусні міри кутів (ac) і (cb).

б) Покажіть за допомогою накладання, який із кутів (ac) і (cb) є меншим.

Письмові вправи

Рівень А

72. Промінь b ділить кут (ac) на два кути. Знайдіть:

а) кут (ac), якщо $\angle(ab)=63°$, $\angle(bc)=63°$;

б) кут (ab), якщо $\angle(ac)=109°$, $\angle(bc)=28°$.

73. Промені OB і OC ділять кут AOD на три кути. Знайдіть кут BOC, якщо $\angle AOD=142°$, $\angle AOB=12°$, а кут COD прямий.

74. Чи може промінь b ділити кут (ac) на два кути, якщо $\angle(bc)=70°$, $\angle(ac)=65°$? Відповідь обґрунтуйте.

75. Промінь BD — бісектриса кута ABC. Знайдіть кути ABC і ABD, якщо кут ABC більший за кут DBC на $38°$.

76. Промінь b — бісектриса кута (ac). Знайдіть:

а) кут (ac), якщо $\angle(bc)=52°$;

б) кут (ab), якщо $\angle(ac)$ прямий.

Рівень Б

77. Промінь b ділить кут (ac), який дорівнює $150°$, на два кути. Знайдіть кути (ab) і (bc), якщо:

а) кут (ab) менший за кут (bc) на $40°$;

б) градусні міри кутів (ab) і (bc) відносяться як $2:3$.

78. Промінь OB ділить кут AOC, що дорівнює $120°$, на два кути. Знайдіть кути AOB і BOC, якщо:

а) кут BOC більший, ніж кут AOB, у 5 разів;

б) градусні міри кутів AOB і BOC відносяться як $3:5$.

79. Промені OB і OC ділять кут AOD на три кути. Знайдіть кут BOC, якщо $\angle AOD=110°$, $\angle AOC=85°$, $\angle BOD=60°$.

80. Кут (ad) поділений променями b і c на три кути. Знайдіть кут (ac), якщо $\angle(ab)=28°$, $\angle(bd)=92°$, $\angle(cd)=44°$.

www.e-ranok.com.ua

81. Промінь l — бісектриса кута (mn). Знайдіть кут (mn), якщо кут між бісектрисами кутів (ml) і (ln) дорівнює $70°$.

82. Промінь OB — бісектриса кута AOC, а промінь OE — бісектриса кута BOC. Знайдіть кут AOC, якщо кут AOE прямий.

Рівень В

83. Промінь OK ділить кут MON на два кути. Знайдіть кут MON, якщо кут між бісектрисами кутів MOK і KON дорівнює $40°$.

84. З даної точки проведено три промені так, що кути між будь-якими двома з них рівні. Знайдіть ці кути.

85. З даної точки проведено кілька променів так, що кут між будь-якими двома сусідніми променями дорівнює $72°$. Скільки всього променів проведено?

Повторення перед вивченням §4

Теоретичний матеріал

- паралельні прямі

5 клас

Задачі

86. На площині позначено точки A, B, C, що не лежать на одній прямій. Чи існує пряма, що проходить через точку A,

а) перетинає пряму BC, але не перетинає променя BC?

б) перетинає промінь BC, але не перетинає прямої BC?

в) не перетинає прямої BC? Висловіть припущення.

87. Усередині гострого кута ABC позначено точку D. Визначте, які з поданих тверджень є правильними:

а) існує пряма, що проходить через точку D, перетинає промінь BA і не перетинає променя BC;

б) існує пряма, що проходить через точку D, перетинає промінь BA і не перетинає прямої BC;

в) існує пряма, що проходить через точку D й не перетинає жодної з прямих BA і BC.

Чи зміняться відповіді, якщо кут ABC буде прямим; тупим; розгорнутим? Висловіть припущення.

www.e-ranok.com.ua

§4 Паралельні прямі

4.1. Означення паралельних прямих

Відомо, що коли дві прямі на площині мають спільну точку, то вони перетинаються. Розглянемо тепер випадок, коли дві прямі не мають спільних точок.

Паралельний — від грецького слова «паралелос» — той, що йде поряд

Означення

Дві прямі на площині називаються **паралельними**, якщо вони не перетинаються.

Уявлення про паралельні прямі дають, наприклад, залізничні рейки або лінійки нотного стану.

На рис. 29 прямі a і b паралельні. Коротко це позначають так: $a \parallel b$. Такий запис читається: «Пряма a паралельна прямій b».

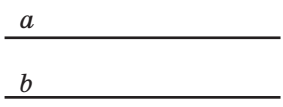


Рис. 29. Паралельні прямі

Отже, можна виділити два випадки взаємного розміщення прямих на площині: ***дві прямі на площині або паралельні, або перетинаються.***

Поряд із паралельністю прямих ми будемо розглядати також паралельність відрізків і променів.

Означення

Два відрізки називаються **паралельними**, якщо вони лежать на паралельних прямих.

Аналогічно формулюються означення паралельності двох променів, прямої і відрізка, променя і відрізка тощо.

На рис. 30 прямі AB і CD паралельні, тому відрізки AB і CD паралельні, промені BA і CD паралельні, відрізок AB паралельний прямій CD і т. д.

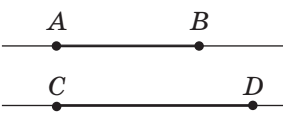


Рис. 30. Паралельні відрізки

www.e-ranok.com.ua

На практиці доволі часто треба проводити пряму, паралельну даній, — наприклад, робити розмітку дороги або креслити поля в зошиті. Чи завжди можна провести через дану точку пряму, паралельну даній? Скільки таких прямих проходить через точку, що не лежить на даній прямій? Відповідь на ці запитання дає аксіома паралельних прямих (аксіома Евкліда).

Аксіома паралельних прямих (аксіома Евкліда)

Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більш ніж одну пряму, паралельну даній[1].

Ми сформулювали лише деякі з аксіом планіметрії. Більш повний перелік аксіом подано в додатку 1.

4.2. Теорема про дві прямі, паралельні третій

На підставі аксіом за допомогою логічних міркувань (доведень) ми будемо отримувати нові геометричні факти. У математиці твердження, справедливість якого встановлюється шляхом доведення, називається **теоремою**. Для доведення теорем використовують означення й аксіоми, а також теореми, доведені раніше.

Отже, сформулюємо й доведемо першу теорему — теорему про паралельні прямі (рис. 31).

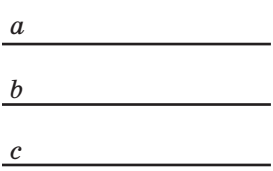


Рис. 31. Дві прямі, паралельні третій

Теорема (про дві прямі, паралельні третій)

Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою.

[1] Насправді має місце таке твердження: «Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і тільки одну». Можливість провести таку пряму ми доведемо в п. 14.3.

www.e-ranok.com.ua

Доведення[1]

□ Нехай a, b і c — дані прямі, причому $a \parallel c$, $b \parallel c$. Доведемо, що прямі a і b паралельні.

Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Тоді вони мають перетинатись у деякій точці C (рис. 32). Таким чином, через точку C проходять дві прямі, паралельні прямій c. Але за аксіомою паралельних прямих через точку поза даною прямою може проходити не більш ніж одна пряма, паралельна даній. Отже, наше припущення про те, що прямі a і b можуть перетинатися, хибне, тобто ці прямі паралельні. Теорему доведено. ■

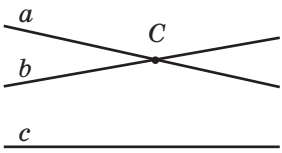


Рис. 32. До припущення про те, що прямі a і b не паралельні

Застосуємо доведену теорему для розв'язування задачі.

Задача

Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму. Доведіть.

Розв'язання

Нехай $a \parallel b$ і пряма c перетинає пряму a (рис. 33). Доведемо, що прямі b і c перетинаються. Припустимо, що ці прямі не перетинаються. У такому разі $b \parallel c$. Оскільки $c \parallel b$ і $a \parallel b$, то за теоремою про дві прямі, паралельні третій, прямі a і c паралельні. Але це неможливо, бо за умовою задачі прямі a і c перетинаються.

Таким чином, припущення про те, що $b \parallel c$, хибне. Отже, прямі b і c перетинаються, що й треба було довести.

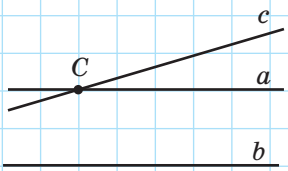


Рис. 33

[1] Початок і закінчення доведення ми будемо позначати □ і ■ відповідно.

www.e-ranok.com.ua

Теорема — від грецького «теорео» — розглядаю, обмірковую

Звернемо увагу на рис. 32, який використовувався в ході доведення теореми. Взаємне розміщення прямих a, b, c на цьому рисунку не відповідає формулюванню теореми, і це легко пояснити: рисунок відображує припущення, яке згодом виявилося хибним. Загалом, рисунки в геометричних теоремах і задачах відіграють особливу роль — те, що на них зображене, є наслідком наявних у нас відомостей, але не навпаки.

Недоведені властивості геометричних фігур, навіть якщо вони здаються очевидними з рисунків, використовувати не можна. Рисунок у геометрії лише відбиває висловлені твердження та властивості, але сам по собі не є доведенням. До того ж, рисунок може не охоплювати всіх можливих варіантів взаємного розміщення елементів фігур, які маються на увазі в задачі або теоремі. Недарма геометрію називають «мистецтвом правильно міркувати на неправильних кресленнях».

4.3. Умова й висновок теореми. Доведення від супротивного

У формулюванні будь-якої теореми завжди можна чітко виділити дві частини: те, що дано (**умова**), і те, що треба довести (**висновок**). Переформулюємо теорему про дві прямі, паралельні третій, у такий спосіб: «Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то ці прямі паралельні між собою». Нам відомо, що ***дві прямі паралельні третій прямій*** — це умова теореми. Потрібно довести, що ***ці прямі паралельні між собою*** — це висновок теореми. Узагалі, виділити умову й висновок найлегше для твердження, поданого у вигляді: «Якщо... ***(умова)***, то... ***(висновок)***».

Проаналізуємо доведення теореми про дві прямі, паралельні третій. Спочатку ми припустили, що прямі a і b не паралельні, тобто

www.e-ranok.com.ua

що висновок теореми є хибним. Потім, спираючись на відомі властивості взаємного розміщення прямих, з'ясували, що через певну точку C проходять дві прямі, паралельні c, тобто дійшли суперечності з аксіомою паралельних прямих. На підставі цієї суперечності ми зробили висновок про те, що наше припущення було помилковим, а отже, правильним є твердження теореми.

Цей метод доведення називається ***доведенням від супротивного.***

Доведенням від супротивного ми скористалися й у задачі, яку розглядали після теореми. Але цей метод не єдиний: уже в наступному параграфі будемо застосовувати й інші методи доведень.

Метод доведення від супротивного інколи використовується як в інших науках, так і в повсякденному житті. Наприклад, лікар, щоб переконатися, що пацієнт не хворий на грип, може міркувати так: «Припустимо, що у хворого грип; тоді в нього мають бути характерні симптоми: підвищення температури, головний біль тощо. Але цих симптомів немає, тобто припущення про грип хибне. Отже, пацієнт не хворий на грип».



Схема доведення від супротивного

Твердження	
Якщо A, то B	
Доведення	
1. *Припущення.* Нехай A, але не B	Припускаємо, що умова теореми справджується, а висновок — ні
2. *Міркування*	Міркуємо, спираючись на аксіоми та раніше доведені теореми
3. *Суперечність*	Отримуємо нове твердження, що суперечить або даній умові, або одній з аксіом, або раніше доведеній теоремі
4. *Висновок.* Тоді B	Переконуємося, що наше припущення хибне, тобто дане твердження є правильним

www.e-ranok.com.ua

Запитання й задачі

Усні вправи

88. Відомо, що $a \parallel b$. Чи означає це, що $b \parallel a$?

89. Два відрізки не мають спільних точок. Чи означає це, що ці відрізки обов'язково паралельні?

90. Прямі KM і EF паралельні. Чи можуть промені MK і FE перетинатися?

91. На площині проведено три паралельні прямі. Чи може якась четверта пряма:

а) перетинати тільки одну з даних прямих;

б) перетинати тільки дві з даних прямих;

в) не перетинати жодної з даних прямих?

92. Чи можна провести два промені з початком у точці поза даною прямою, які були б паралельні даній прямій? Якими мають бути ці промені?

Графічні вправи

93. За допомогою двосторонньої лінійки проведіть паралельні прямі a і b.

а) Позначте на прямій a точку A. Чи можна провести через точку A іншу пряму, паралельну прямій b? Чому?

б) Побудуйте відрізок AD, паралельний прямій b. Чи лежить точка D на прямій a?

в) Проведіть через точку A пряму c, що не збігається з прямою a. Чи перетинаються прямі b і c? Чому?

94. За допомогою двосторонньої лінійки проведіть паралельні прямі a і b.

а) Проведіть пряму c, паралельну прямій a. Чи паралельні прямі b і c? Чому?

б) Позначте на прямій c точки A, B і C. Назвіть два промені, паралельні прямій b.

www.e-ranok.com.ua

Письмові вправи

Рівень А

95. Дано пряму a і точки A, B і C (рис. 34). Скільки прямих, паралельних прямій a, можна провести через дані точки? Проведіть усі такі прямі. Чи можуть вони перетинатися? Відповідь обґрунтуйте.

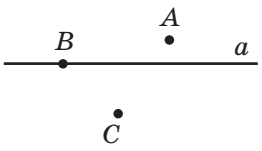


Рис. 34

96. Пряма паралельна одній із двох паралельних прямих. Чи може вона перетинати другу пряму? Відповідь обґрунтуйте.

97. Дві прямі є паралельними. Доведіть методом від супротивного, що будь-яка третя пряма не може перетинати обидві ці прямі в одній і тій самій точці.

98. Доведіть методом від супротивного твердження: «Якщо пряма паралельна одній зі сторін нерозгорнутого кута, то вона не може бути паралельною другій його стороні».

Рівень Б

99. Три паралельні шосейні траси перетинаються двома іншими паралельними трасами. Скільки перехресть утворилося?

100. На площині проведено прямі a, b, c і d, причому $a \parallel b$, $c \parallel d$. Прямі a і c перетинаються. Скільки всього точок перетину мають дані прямі?

101. Через точку, що не лежить на прямій c, проведено чотири прямі. Скільки з них можуть перетинати пряму c? Розгляньте всі можливі випадки.

102. На площині проведено чотири прямі, причому три з них мають одну спільну точку. Скільки пар паралельних прямих може утворитися на площині? Розгляньте всі можливі випадки.

103. Пряма a паралельна прямій b і не паралельна прямій c. Доведіть, що прямі b і c перетинаються.

104. Прямі a і b перетинаються, пряма c паралельна прямій b. Доведіть, що будь-яка пряма, паралельна прямій a, перетинає прямі b і c.

www.e-ranok.com.ua

Рівень В

105. На площині проведено кілька прямих, причому ніякі три з них не перетинаються в одній точці. Усього утворилися три точки перетину. Скільки прямих проведено? Розгляньте всі можливі випадки.

106. На площині проведено три прямі. При цьому утворилися дві точки перетину. Доведіть, що серед даних прямих є паралельні.

107. На площині проведено чотири прямі. При цьому утворилося шість точок перетину. Доведіть, що серед даних прямих немає паралельних.

Повторення перед вивченням §5

Теоретичний матеріал

- доповняльні промені
- вимірювання кутів

п. 1.3; 3.3

Задачі

108. Промені b і c ділять розгорнутий кут (ad) на три кути. Знайдіть кут (bd), якщо $\angle(ac)=135^\circ$, $\angle(bc)=20^\circ$. Скільки розв'язків має задача?

109. Промінь OA_1 є доповняльним до сторони OA кута AOB. Знайдіть кут AOB, якщо він дорівнює куту A_1OB.

www.e-ranok.com.ua

§5 Суміжні кути та їхні властивості

5.1. Означення суміжних кутів

У попередніх параграфах розглядалися види кутів залежно від їхньої градусної міри. Перейдемо до вивчення кутів, що мають спільні елементи.

Нехай на прямій точка O лежить між точками A і B, а C — довільна точка поза прямою AB (рис. 35). Тоді кути AOC і COB мають спільну сторону, а сторони OA і OB даних кутів є доповняльними променями.

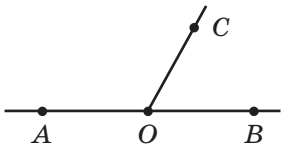


Рис. 35. Кути AOC і COB суміжні

Означення

Два кути називаються **суміжними**, якщо вони мають спільну сторону, а інші сторони цих кутів є доповняльними променями.

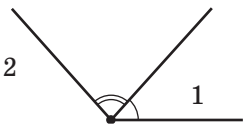


Рис. 36. Кути 1 і 2 мають спільну сторону, але не суміжні

Пропуск хоч однієї умови у формулюванні означення неприпустимий; це може призвести до того, що буде описано інший геометричний об'єкт. Так, якщо сторони двох кутів не є доповняльними променями, то навіть у разі наявності спільної сторони такі кути не суміжні (рис. 36). Не є суміжними й кути, що не задовольняють першу умову означення, тобто не мають спільної сторони (рис. 37).

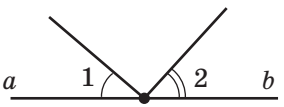


Рис. 37. Сторони a і b кутів 1 і 2 — доповняльні промені, але ці кути не суміжні

5.2. Теорема про суміжні кути. Наслідки з теореми

Теорема (про суміжні кути)

Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Доведення

□ Нехай кути (ab) і (bc) — дані суміжні кути (рис. 38). Тоді за означенням суміжних кутів промені a і c є доповняльними, тобто кут (ac)

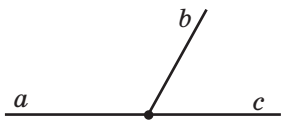


Рис. 38. Сума кутів (ab) і (bc) дорівнює 180°

www.e-ranok.com.ua

розгорнутий, а його градусна міра дорівнює $180°$. Промінь b ділить кут (ac) на два кути, і за аксіомою вимірювання кутів $\angle(ab)+\angle(bc)=\angle(ac)=180°$. Теорему доведено. ■

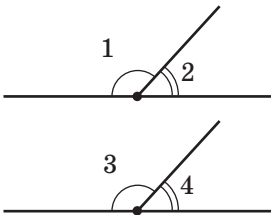


Рис. 39. Кути, суміжні з рівними кутами, також рівні

Сформулюємо тепер кілька тверджень, які легко обґрунтувати за допомогою доведеної теореми.

1. ***Якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути також рівні.***

Справді, за теоремою про суміжні кути $\angle1+\angle2=\angle3+\angle4=180°$ (рис. 39). Якщо $\angle1=\angle3$, то $180°-\angle1=180°-\angle3$, тобто $\angle2=\angle4$.

2. ***Два кути, суміжні з одним і тим самим кутом, рівні.***

На рис. 40 кути 1 і 2, а також кути 1 і 3 є суміжними. Оскільки сума суміжних кутів дорівнює $180°$, то $\angle2=\angle3=180°-\angle1$.

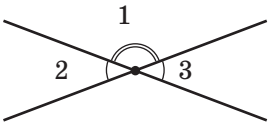


Рис. 40. Кути, суміжні з одним і тим самим кутом, рівні

3. ***Кут, суміжний із прямим кутом, також прямий. Кут, суміжний із тупим кутом, гострий. Кут, суміжний із гострим кутом, тупий.***

Ці твердження випливають із теореми про суміжні кути, оскільки $180°-90°=90°$ (рис. 41), а якщо два нерівні кути в сумі складають $180°$, то один із них більший за $90°$ (тобто тупий), а другий — менший за $90°$ (тобто гострий).



Рис. 41. Кут, суміжний із прямим кутом, прямий

У математиці твердження, що безпосередньо випливають із теорем (або аксіом), називають **наслідками**. Обґрунтовуючи наслідки 1–3, ми щоразу згадували теорему про суміжні кути: або вказували її назву, або переказували зміст. Такі звернення до відомого твердження з метою обґрунтування нового називають **посиланнями**. Розв'язуючи геометричну

www.e-ranok.com.ua

задачу або доводячи нову теорему, необхідно посилатися на раніше вивчені означення, аксіоми, теореми та їхні наслідки, а також на дані, що містяться в умові задачі або випливають із неї. Наприклад, під час доведення теореми про суміжні кути ми посилалися на означення суміжних кутів, розгорнутого кута й аксіому вимірювання кутів, а під час доведення теореми про дві прямі, паралельні третій, — на аксіому паралельних прямих.



Задача

Доведіть, що коли два суміжні кути рівні, то вони прямі.

Розв'язання

Якщо $\angle 1$ і $\angle 2$ суміжні, то $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (за теоремою про суміжні кути). Оскільки за умовою задачі $\angle 1 = \angle 2$, то кожний із цих кутів дорівнює $180° : 2 = 90°$, тобто дані кути є прямими, що й треба було довести.

Запитання й задачі

Усні вправи

110. Два кути мають спільну сторону. Чи означає це, що:
а) ці кути мають спільну вершину;
б) сума цих кутів дорівнює $180°$?

111. Чи можуть обидва суміжні кути бути:
а) гострими;
б) прямими;
в) тупими?

www.e-ranok.com.ua

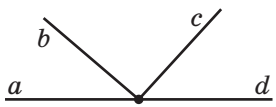


Рис. 42

112. Промені b і c ділять розгорнутий кут (ad) на три кути (рис. 42). Скільки пар суміжних кутів при цьому утворилося? Назвіть ці кути.

113. Рисунок, на якому зображено суміжні кути, перегнули по прямій, що містить їхню спільну сторону. При цьому інші сторони даних кутів збіглися. Знайдіть дані суміжні кути.

114. Знайдіть кут, суміжний із кутом, який дорівнює: $30°$; $60°$; $90°$; $135°$.

Графічні вправи

115. Накресліть розгорнутий кут (ab).

а) З вершини цього кута проведіть промінь c так, щоб кут (ac) був тупим. Назвіть утворені суміжні кути.

б) Виміряйте транспортиром кут (cb) і обчисліть градусну міру кута (ac), користуючись теоремою про суміжні кути.

в) Проведіть промінь d, що ділить кут (ac) на два кути. Скільки пар суміжних кутів утворилося на рисунку?

116. Накресліть кут ABC, що дорівнює $45°$.

а) Проведіть промінь BD так, щоб кути DBA і ABC були суміжними. Знайдіть градусну міру кута DBA.

б) Проведіть промінь BM, що ділить кут DBA на два кути, один із яких дорівнює куту ABC. Скількома способами це можна зробити? Чи будуть рівні кути суміжними?

Письмові вправи

Рівень А

117. Дві прямі перетинаються. Скільки пар суміжних кутів при цьому утворилося?

118. Через вершину нерозгорнутого кута проведено пряму, що містить його бісектрису. Скільки пар суміжних кутів при цьому утворилося?

www.e-ranok.com.ua

119. Знайдіть суміжні кути, якщо:
а) їхні градусні міри відносяться як $5:31$;
б) їхня різниця дорівнює $70°$.

120. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них:
а) утричі більший, ніж другий;
б) на $20°$ менший, ніж другий.

121. Бісектриса ділить кут AOB на два кути, один із яких дорівнює $50°$. Знайдіть градусну міру кута, суміжного з кутом AOB.

122. Кути 1 і 2, а також кути 3 і 4 — дві пари суміжних кутів. Порівняйте кути 2 і 4, якщо $\angle 1 > \angle 3$.

123. На рис. 43 $\angle AOB = 72°$, $\angle COD = 37°$. Знайдіть кут BOC.

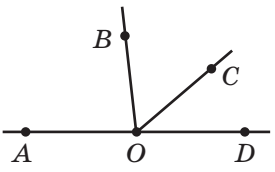


Рис. 43

Рівень Б

124. Знайдіть даний кут, якщо сума двох суміжних із ним кутів дорівнює $240°$.

125. Бісектриса кута утворює з променем, доповняльним до сторони даного кута, кут $130°$. Знайдіть даний кут.

126. Знайдіть кут, сторона якого утворює з променем, доповняльним до бісектриси даного кута, кут $165°$.

127. Промені b і c ділять розгорнутий кут (ad) на три кути (рис. 42). Знайдіть найбільший із цих кутів, якщо $\angle(ac) = 160°$, $\angle(bd) = 140°$.

128. Знайдіть кут BOC (рис. 43), якщо $\angle BOD = 112°$, $\angle AOC = 138°$.

Рівень В

129. Різниця двох суміжних кутів відноситься до одного з них як $5:2$. Знайдіть ці суміжні кути.

130. Бісектриса даного кута утворює з його стороною кут, який дорівнює куту, суміжному з даним. Знайдіть даний кут.

131. Знайдіть кут між бісектрисами суміжних кутів.

www.e-ranok.com.ua

132. Сума двох кутів, що мають спільну сторону, дорівнює $180°$. Чи обов'язково ці кути є суміжними?

133. Якщо бісектриси кутів AOB і BOC утворюють прямий кут, то точки A, O і C лежать на одній прямій. Доведіть.

Повторення перед вивченням §6

Теоретичний матеріал

- перпендикулярні прямі
- вимірювання кутів

6 клас
п. 3.3

Задачі

134. Кути (mn) і (kp) є суміжними з кутом (np). Серед променів m, n, k, p назвіть пари доповняльних променів.

135. Кути (ab) і (bc) суміжні. Кути (bc) і (cd) також суміжні, причому $\angle(cd)=32°$. Знайдіть кути (ad) і (ab).

www.e-ranok.com.ua

§6 Вертикальні кути та їхні властивості. Перпендикулярні прямі. Кут між двома прямими

6.1. Означення вертикальних кутів

Розглянемо ще один випадок взаємного розміщення кутів зі спільними елементами.

Вертикальний — від латинського «вертикаліс» — вершинний

Означення

Два кути називаються **вертикальними**, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого.

На рис. 44 прямі AC і BD перетинаються в точці O. Сторони OD і OA кута AOD є доповняльними променями сторін OB і OC кута BOC, тому ці кути вертикальні. Вертикальними є також кути AOB і DOC.

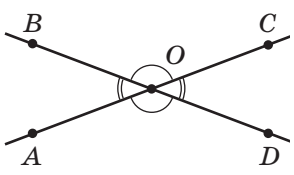


Рис. 44. У результаті перетину двох прямих утворюються дві пари вертикальних кутів

Таким чином, ***у результаті перетину двох прямих***[1] ***утворюються дві пари вертикальних кутів.***

Наочне уявлення про вертикальні кути дають, наприклад, звичайні ножиці.

6.2. Теорема про вертикальні кути. Кут між прямими

Основну властивість вертикальних кутів передає така теорема.

Теорема (про вертикальні кути)

Вертикальні кути рівні.

[1] Тут і далі, кажучи про кути, утворені в результаті перетину двох прямих, ми матимемо на увазі нерозгорнуті кути.

www.e-ranok.com.ua

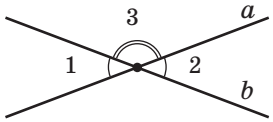


Рис. 45. Вертикальні кути є суміжними з одним і тим самим кутом

Доведення

☐ Нехай $\angle 1$ і $\angle 2$ — вертикальні кути, що утворилися в результаті перетину прямих a і b (рис. 45). Розглянемо кут 3, сторонами якого також є півпрямі прямих a і b. Кути 1 і 2 суміжні з кутом 3 (за означенням суміжних кутів), тому за наслідком теореми про суміжні кути $\angle 1 = \angle 2$. Теорему доведено. ■

Задача

Сума двох кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, дорівнює 100°. Знайдіть усі утворені кути.

Розв'язання

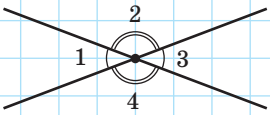


Рис. 46

За умовою задачі в результаті перетину двох прямих утворилися два кути, сума яких становить 100°. Ці кути можуть бути або суміжними, або вертикальними. Сума суміжних кутів дорівнює 180°, отже, дані кути не можуть бути суміжними, тобто вони є вертикальними.

Нехай $\angle 1 + \angle 3 = 100°$ (рис. 46).

Оскільки вертикальні кути рівні, то кожний із двох даних кутів дорівнює $100° : 2 = 50°$. Таким чином, $\angle 1 = \angle 3 = 50°$.

Оскільки кути 1 і 2 суміжні, то $\angle 2 = 180° - \angle 1 = 180° - 50° = 130°$ (за теоремою про суміжні кути).

Оскільки кути 2 і 4 вертикальні, то $\angle 4 = \angle 2 = 130°$ (за теоремою про вертикальні кути).

Відповідь: 50°; 130°; 50°; 130°.

Означення

Кутом між двома прямими, що перетинаються, називається менший із кутів, що утворилися в результаті перетину цих прямих.

www.e-ranok.com.ua

На рис. 47 дві прямі, перетинаючись, утворюють два кути по $30°$ і два кути по $150°$. Кут між цими прямими за означенням дорівнює $30°$ (інакше кажуть: прямі ***перетинаються під кутом*** $30°$).

Очевидно, що коли в результаті перетину двох прямих утворюються чотири рівні кути, то всі вони дорівнюють $90°$, тобто ці прямі перетинаються під прямим кутом.

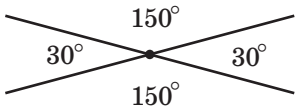


Рис. 47. Дві прямі перетинаються під кутом $30°$

6.3. Перпендикулярні прямі

Означення

Дві прямі називаються **перпендикулярними**, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

Перпендикулярний — від латинського «перпендикуларіс» — прямовисний

На рис. 48 прямі a і b перпендикулярні. Коротко це позначають так: $a \perp b$.

Відрізки або промені називаються **перпендикулярними**, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

Доведемо важливе твердження, що пов'язує поняття перпендикулярності і паралельності прямих.

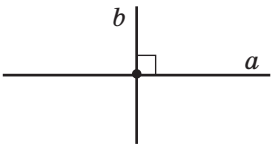


Рис. 48. Прямі a і b перпендикулярні

Теорема (про дві прямі, перпендикулярні до третьої)

Дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні.

Твердження теореми ілюструє рис. 49. На цьому рисунку $a \perp c$, $b \perp c$, $a \parallel b$.

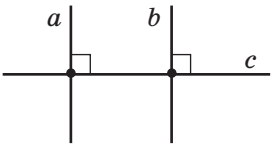


Рис. 49. Дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні

Доведення

□ Нехай дано прямі A_1A_2 і B_1B_2, перпендикулярні до прямої AB. Доведемо методом від супротивного, що $A_1A_2 \parallel B_1B_2$.

www.e-ranok.com.ua

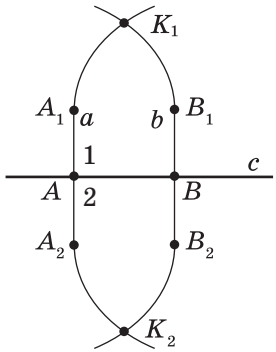


Рис. 50. До припущення про те, що прямі A_1A_2 і B_1B_2 перетинаються

Припустимо, що ці прямі не паралельні. Тоді вони перетинаються в деякій точці K_1 (рис. 50).

Перегнемо рисунок по прямій AB. Оскільки прямі кути 1 і 2 рівні, то в результаті перегинання промінь AA_1 суміститься з променем AA_2. Аналогічно промінь BB_1 суміститься з променем BB_2. Тому точка K_1, у якій перетинаються ці прямі, має суміститися з деякою точкою K_2, що також лежить на цих прямих. Таким чином, через точки K_1 і K_2 проходять дві прямі A_1A_2 і B_1B_2, що неможливе за аксіомою проведення прямої. Отже, наше припущення хибне, тобто прямі A_1A_2 і B_1B_2 паралельні.

Теорему доведено. ■[1]

Властивість, описана в теоремі, використовується для побудови паралельних прямих за допомогою лінійки та косинця (рис. 51). Двічі прикладаючи косинець до лінійки, можна провести дві прямі, перпендикулярні до краю лінійки. За доведеною теоремою такі прямі є паралельними.

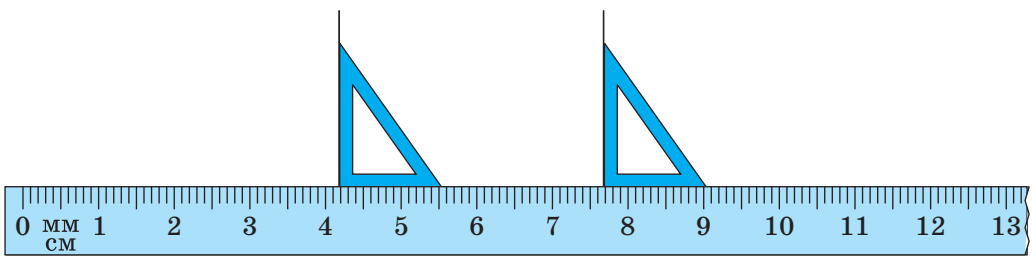


Рис. 51. Побудова паралельних прямих за допомогою лінійки та косинця

[1] У ході доведення цієї теореми можна не розглядати перегинання, а скористатися розширеним переліком аксіом, наведених на с. 213–214.

www.e-ranok.com.ua

Запитання й задачі

Усні вправи

136. Чи можуть дві прямі, перетинаючись, утворити три гострі кути; тільки один тупий кут; чотири прямі кути?

137. Чи є правильним твердження: «Два рівні кути зі спільною вершиною є вертикальними»?

138. Кути 1 і 2 утворилися в результаті перетину двох неперпендикулярних прямих. Визначте, якими є ці кути — суміжними або вертикальними, якщо:

а) їхня сума більша за $180°$;

б) лише один із них гострий;

в) їхня сума менша, ніж сума інших двох отриманих кутів.

139. α і β — градусні міри двох суміжних кутів. Чи можуть α і β бути градусними мірами двох вертикальних кутів? У якому випадку?

140. У результаті перетину двох прямих утворився тупий кут α. Чому дорівнює кут між даними прямими?

141. У результаті перетину двох прямих утворилися чотири кути, жоден із яких не є гострим. Під яким кутом перетинаються дані прямі?

142. Через точку перетину двох перпендикулярних прямих a і b проведено пряму c. Чи може вона бути перпендикулярною до якої-небудь із прямих a і b?

Графічні вправи

143. Накресліть прямі a і b, що перетинаються в точці O під кутом $80°$.

а) Виділіть кольором усі пари вертикальних кутів, що утворилися на рисунку. Якими є градусні міри цих кутів?

б) Проведіть через точку O пряму, перпендикулярну до прямої a. Чи буде ця пряма перпендикулярною до прямої b?

144. Накресліть перпендикулярні прямі a і b, що перетинаються в точці O.

а) Позначте на прямій a точку B. За допомогою косинця проведіть через цю точку пряму c, перпендикулярну до прямої a.

б) Чи паралельні прямі b і c? Чому?

www.e-ranok.com.ua

Письмові вправи

Рівень А

145. Один із кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, дорівнює $125°$. Знайдіть решту кутів. Чому дорівнює кут між цими прямими?

146. Знайдіть усі кути, що утворилися в результаті перетину двох прямих, якщо:

а) бісектриса відтинає від одного з них кут $23°$;

б) один із цих кутів утричі більший, ніж інший.

147. Знайдіть усі кути, що утворилися в результаті перетину двох прямих, якщо:

а) сума двох із них дорівнює $320°$;

б) один із цих кутів на $50°$ менший за інший.

148. Перпендикулярні прямі AB і CD перетинаються в точці K. Назвіть:

а) три відрізки, перпендикулярні до прямої CD;

б) чотири промені, перпендикулярні до відрізка AK.

149. Один із кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, є тупим. Доведіть методом від супротивного, що жоден із решти утворених кутів не може бути прямим.

150. У результаті перетину двох прямих утворилися чотири кути, один із яких є прямим. Доведіть, що решта кутів також прямі.

151. Прямі a і b перпендикулярні. Пряма c проходить через точку їхнього перетину й утворює з прямою a кут $70°$. Знайдіть кут між прямими c і b.

152. Пряма c проходить через точку перетину прямих a і b, причому прямі a і b перетинаються під кутом $25°$, прямі a і c перпендикулярні. Знайдіть кут між прямими b і c.

Рівень Б

153. Знайдіть усі кути, що утворилися в результаті перетину двох прямих, якщо:

а) сума трьох із них дорівнює $295°$;

б) градусні міри двох із цих кутів відносяться як $4:5$.

www.e-ranok.com.ua

154. Знайдіть кут між двома прямими, які перетинаються, якщо:

а) сума двох утворених кутів на 80° менша, ніж сума двох інших кутів;

б) один із кутів, що утворилися, удвічі менший за суму решти трьох кутів.

155. Три прямі перетинаються в одній точці так, що два з кутів, які утворилися в результаті перетину, дорівнюють 56° і 39° (рис. 52). Знайдіть решту чотири кути між сусідніми променями.

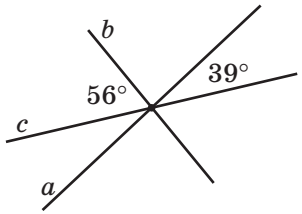


Рис. 52

156. Дві прямі перетинаються в точці O. Бісектриса одного з кутів, що утворилися в результаті перетину, складає з однією з даних прямих кут 72°. Знайдіть кут, під яким перетинаються дані прямі.

157. Дано прямі a, b, c і d, причому $a \perp c$, $b \perp c$, $a \parallel d$. Доведіть, що прямі b і d паралельні.

158. Прямі a і b перетинаються, а пряма c перпендикулярна до прямої a. Доведіть, що прямі b і c не можуть бути перпендикулярними.

Рівень В

159. Один із кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, дорівнює сумі двох інших кутів. Знайдіть кут між даними прямими.

160. Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів є доповняльними півпрямими.

161. Два рівні кути мають спільну вершину, а їхні бісектриси є доповняльними променями. Доведіть, що ці кути вертикальні.

162. Через точку перетину двох перпендикулярних прямих проведено третю пряму. Знайдіть найменший із тупих кутів, що утворилися в результаті перетину цих трьох прямих, якщо найбільший із утворених тупих кутів дорівнює 165°.

163. Через точку на площині проведено п'ять прямих. Яка найбільша кількість пар перпендикулярних прямих може бути серед них?

www.e-ranok.com.ua

Повторення перед вивченням § 7

Теоретичний матеріал

- трикутник
- рівні відрізки
- рівні кути

5 клас

пп. 2.2; 3.2

Задачі

164. Відрізки AB і CD лежать на одній прямій і мають спільну середину O. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $OA = 4$ см, $AC = 12$ см. Скільки розв'язків має задача?

165. Кути (ab) і (cd) мають спільну вершину та спільну бісектрису l. Знайдіть кут (cb), якщо $\angle(ab) = 50°$, $\angle(dl) = 10°$. Скільки розв'язків має задача?

Онлайн-тренування для підготовки до контрольної роботи № 1

Задачі для підготовки до контрольної роботи № 1

1. На промені з початком у точці A побудуйте відрізки AB і AC так, щоб $AB = 8$ см, $AC = 5$ см.

а) Яка з трьох даних точок лежить між двома іншими?

б) Яку довжину має відрізок BC?

2. Промінь OL ділить кут MON на два кути так, що $\angle MOL = 84°$ і $\angle LON = 18°$. Промінь OK — бісектриса кута MON. Знайдіть кут KOL.

3. Прямі a і b перетинаються, пряма c паралельна прямій a. Доведіть методом від супротивного, що прямі b і c не паралельні.

4. Різниця двох суміжних кутів дорівнює одному з них. Знайдіть ці суміжні кути.

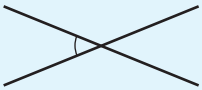
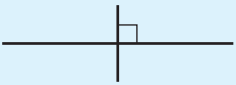
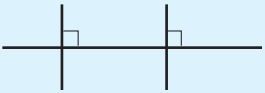
5. Сума трьох кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, на 60° більша, ніж четвертий кут. Знайдіть кут між даними прямими.

6. Кути AOB і COB суміжні, причому $\angle AOB = 108°$. З точки O проведено промінь OD так, що $\angle COD = 126°$. Чи є промінь OD бісектрисою кута AOB? Відповідь обґрунтуйте.

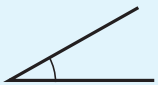
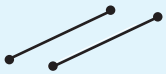
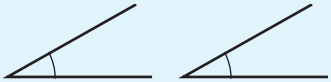
www.e-ranok.com.ua

Підсумки

ПІДСУМКОВИЙ ОГЛЯД РОЗДІЛУ І

<table>
<tr><th colspan="2">ТОЧКА І ПРЯМА</th></tr>
<tr><td>Аксіома проведення прямої
Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну</td><td>Аксіома розміщення точок на прямій
Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими</td></tr>
<tr><th colspan="2">ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ</th></tr>
<tr><th>Перетинаються</th><th>Паралельні</th></tr>
<tr><td> 
Кутом між двома прямими, які перетинаються, називається менший із кутів, що утворилися в результаті перетину цих прямих</td><td> 
Дві прямі на площині називаються паралельними, якщо вони не перетинаються</td></tr>
<tr><td> 
Перпендикулярними прямими називаються дві прямі, що перетинаються під прямим кутом</td><td> 
Аксіома паралельних прямих
Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більш ніж одну пряму, паралельну даній</td></tr>
<tr><th colspan="2">ТЕОРЕМИ ПРО ПАРАЛЕЛЬНІ Й ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ</th></tr>
<tr><td>Теорема про дві прямі, паралельні третій
 
Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою</td><td>Теорема про дві прямі, перпендикулярні до третьої
 
Дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні</td></tr>
</table>

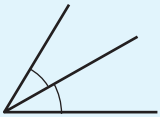
www.e-ranok.com.ua

<table>
<tr><th colspan="2">ПРОМІНЬ</th></tr>
<tr><td>
Променем називається частина прямої, що складається з усіх точок цієї прямої, які лежать по один бік від певної даної на ній точки (початку променя), а також самої цієї точки</td><td>
Доповняльними променями називаються два різні промені однієї прямої зі спільною початковою точкою</td></tr>
<tr><th>ВІДРІЗОК</th><th>КУТ</th></tr>
<tr><td>
Відрізком називається частина прямої, що складається з двох заданих точок цієї прямої (кінців відрізка) й усіх точок, що лежать між ними</td><td> 
Кутом називається геометрична фігура, що складається з двох променів (сторін кута), які виходять з однієї точки (вершини кута)</td></tr>
<tr><td> 
Рівними відрізками називаються відрізки, які суміщаються накладанням</td><td> 
Рівними кутами називаються кути, які суміщаються накладанням</td></tr>
<tr><td>Аксіоми вимірювання та відкладання відрізків
• Кожний відрізок має певну довжину, що виражається додатним числом у заданих одиницях вимірювання. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які відрізок ділиться будь-якою його точкою
• На будь-якому промені від його початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини, і тільки один</td><td>Аксіоми вимірювання та відкладання кутів
• Кожний кут має градусну міру, що виражається додатним числом. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Якщо промінь ділить даний кут на два кути, то градусна міра даного кута дорівнює сумі градусних мір двох отриманих кутів
• Від будь-якого променя даної прямої можна відкласти в заданий бік від прямої кут із заданою градусною мірою, меншою за 180°, і тільки один</td></tr>
</table>

www.e-ranok.com.ua

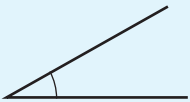


Серединою відрізка називається точка відрізка, що ділить його навпіл



Бісектрисою кута називається промінь, що виходить із вершини кута й ділить кут навпіл (тобто на два рівні кути)

ВИДИ КУТІВ (за градусною мірою)



Гострий кут — кут, менший за 90°



Прямий кут — кут, який дорівнює 90°

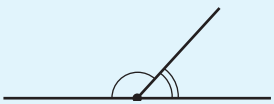


Тупий кут — кут, більший за 90°, але менший за 180°

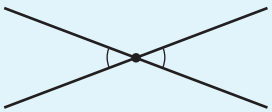


Розгорнутий кут — кут, який дорівнює 180°

КУТИ, ЩО УТВОРЮЮТЬСЯ В РЕЗУЛЬТАТІ ПЕРЕТИНУ ДВОХ ПРЯМИХ



Суміжні кути — два кути, що мають спільну сторону, а інші сторони цих кутів є доповняльними променями



Вертикальні кути — два кути, сторони одного з яких є доповняльними променями сторін другого

Теорема про суміжні кути
Сума суміжних кутів дорівнює 180°

Теорема про вертикальні кути
Вертикальні кути рівні

Наслідки з теореми про суміжні кути

1. Якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути також рівні.
2. Два кути, суміжні з одним і тим самим кутом, рівні.
3. Кут, суміжний із прямим кутом, також прямий. Кут, суміжний із тупим кутом, гострий. Кут, суміжний із гострим кутом, тупий

www.e-ranok.com.ua

Контрольні запитання

1. Назвіть основні геометричні фігури на площині. Як вони позначаються?

2. Сформулюйте аксіому проведення прямої.

3. Сформулюйте аксіому розміщення точок на прямій.

4. Яка фігура називається променем (півпрямою)? Як позначаються промені?

5. Які промені називаються доповняльними?

6. Дайте означення відрізка. Як позначається відрізок?

7. Які відрізки називаються рівними? Як порівняти два відрізки?

8. Сформулюйте аксіоми вимірювання та відкладання відрізків. Як порівняти два відрізки із заданими довжинами?

9. Дайте означення середини відрізка.

10. Дайте означення кута. Як позначаються кути?

11. Який кут називається розгорнутим?

12. Які кути називаються рівними? Як порівняти два кути?

13. Сформулюйте аксіоми вимірювання та відкладання кутів. Як порівняти два кути із заданими градусними мірами?

14. Назвіть одиницю вимірювання кутів. Які кути називаються гострими, прямими, тупими?

15. Дайте означення бісектриси кута.

16. Дайте означення паралельних прямих. Назвіть два випадки взаємного розміщення прямих на площині. Які відрізки (промені) називаються паралельними?

17. Сформулюйте аксіому паралельних прямих. У чому полягає відмінність аксіом від теорем? Наведіть приклади аксіом із курсу геометрії.

18. Сформулюйте й доведіть теорему про дві прямі, паралельні третій.

19. У чому полягає метод доведення від супротивного? Опишіть етапи міркувань у ході доведення від супротивного.

20. Дайте означення суміжних кутів.

21. Сформулюйте й доведіть теорему про суміжні кути.

22. Сформулюйте наслідки з теореми про суміжні кути.

23. Дайте означення вертикальних кутів.

www.e-ranok.com.ua

24. Сформулюйте й доведіть теорему про вертикальні кути.

25. Дайте означення кута між прямими. Скільки гострих, тупих, прямих кутів може утворитися в результаті перетину двох прямих?

26. Дайте означення перпендикулярних прямих.

27. Сформулюйте й доведіть теорему про дві прямі, перпендикулярні до третьої.

Додаткові задачі

166. На прямій позначено точки A і C так, що $AC = 3$. Точка B лежить на відрізку AC, причому $AB : BC = 2 : 1$. Знайдіть на даній прямій усі точки D такі, що $AD + BD = CD$.

167. Точки A і B рухаються по прямій. Визначте, на яку величину переміститься середина відрізка AB, якщо точка A переміститься на 3 одиниці, а точка B — на 7 одиниць. Розгляньте випадки руху точок в одному напрямку й у протилежних напрямках.

168. На лінійці позначено три поділки: 0 см, 2 см і 5 см. Як за допомогою такої лінійки побудувати відрізок завдовжки 6 см?

169. Як за допомогою косинця з кутом $35°$ відкласти кут $40°$?

170. Дано шаблон кута в $17°$. Як за допомогою цього шаблона побудувати:

а) кут $7°$;

б) кут $10°$?

171. Як за допомогою шаблона кута в $27°$ побудувати дві перпендикулярні прямі?

172. Скільки кутів, менших за $180°$, зображено на рис. 53?

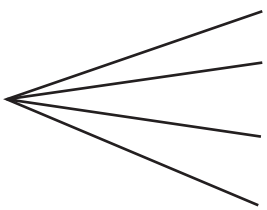


Рис. 53

173. Промені b і c ділять кут (ad) на три рівні кути. Доведіть, що бісектриса кута (bc) є бісектрисою кута (ad).

174. Точка M лежить поза внутрішньою областю кута AOB. Промінь OC — бісектриса цього кута. Доведіть, що кут MOC дорівнює півсумі кутів AOM і BOM.

175. Точка M лежить у внутрішній області кута AOB. Промінь OC — бісектриса цього кута. Доведіть, що кут MOC дорівнює модулю півризниці кутів AOM і BOM.

www.e-ranok.com.ua

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Найдавніша наука. Геометрія, як і математика загалом, зароджувалася з потреб практичної діяльності. Адже скрізь, де жили й працювали люди, необхідно було вимірювати, обчислювати, міркувати тощо. Перші документальні свідчення про геометричні знання дійшли до нас зі Стародавнього Єгипту. Води Нілу щороку затоплювали майже всі земельні ділянки, отже, єгиптянам доводилося їх знову розмежовувати. Так у процесі роботи люди дізнавалися про найпростіші властивості геометричних фігур.

Становлення геометрії. Становлення геометрії як власне науки пов'язане з працями давньогрецьких учених: Фалеса (орієнт. 625–547 рр. до н. е.), Піфагора (орієнт. 570–500 рр. до н. е.), Евдокса (орієнт. 408–355 рр. до н. е.). Вони сформулювали й довели багато основних геометричних тверджень.



Евклід

Однією з найвидатніших постатей в історії геометрії заслужено вважається Евклід Александрійський (орієнт. 330–275 рр. до н. е.). Його праця «Начала» стала підручником, за яким вивчали геометрію протягом майже двох тисяч років. Евклід першим застосував саме той підхід до викладу геометрії, яким користуємося зараз ми: спочатку сформулював основні означення й властивості найпростіших фігур (аксіоми), а потім, спираючись на них, довів багато інших тверджень.



www.e-ranok.com.ua

Геометрія в Україні. Цікаві сторінки історії розвитку геометрії, зокрема її викладання в школі, пов'язані з Україною. Саме тут в одній із харківських гімназій наприкінці XIX ст. розпочинав свою діяльність відомий педагог Андрій Петрович Кисельов (1852–1940), за підручником якого вивчали геометрію протягом майже 60 років.



А. П. Кисельов



О. В. Погорєлов

Професор Харківського університету Олексій Васильович Погорєлов (1919—2002) збагатив сучасну геометрію новітніми дослідженнями та створив шкільний підручник, за яким навчалося кілька поколінь учнів.

Дослідження та відкриття вчених-геометрів застосовуються в багатьох галузях людської діяльності. Геометрія стала елементом загальнолюдської культури — адже без знання основ геометрії неможливо уявити собі сучасну освічену людину.



Споруджені за дві–чотири тисячі років до нашої ери, **єгипетські піраміди** і сьогодні вражають точністю метричних відношень; будівельники вже тоді знали чимало геометричних відомостей і розрахунків.

Тематика повідомлень та рефератів до розділу І

1. Вимірювання відстаней і кутів на місцевості.
2. Походження основних геометричних термінів.
3. Система геометричних аксіом — від Евкліда до сьогодення.
4. О. В. Погорєлов — видатний український геометр.
5. Логічна правильність означень.
6. Аналогія як форма умовиводу.

Рекомендовані джерела інформації

1. Математична хрестоматія. — К. : Рад. шк., 1970. — Т. 1, 2.
2. Глейзер Г. И. История математики в школе. VII–VIII кл. — М. : Просвещение, 1982.
3. Шрейдер Ю. А. Что такое расстояние? (Популярные лекции по математике, вып. 38). — М. : Физматгиз, 1963.
4. Перельман Я. И. Занимательная геометрия. — М. : Физматгиз, 1959.
5. Гетманова А. Д. Логика. — М. : Дрофа, 1995.
6. Интернет-библиотека МЦНМО. http://www.mccme.ru/free-books/
7. Гранд геометрии. А. В. Погорелов. http://kharkov.vbelous.net/avp/

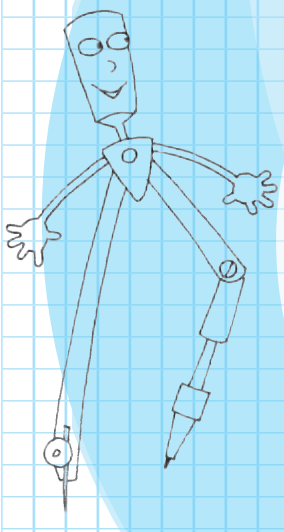
Відеоматеріали за розділом І

www.e-ranok.com.ua

Розділ II

Трикутники. Ознаки рівності трикутників

§ 7. Трикутник і його елементи. Рівність геометричних фігур
§ 8. Перша ознака рівності трикутників та її застосування
§ 9. Перпендикуляр до прямої. Відстань від точки до прямої
§ 10. Друга ознака рівності трикутників та її застосування
§ 11. Види трикутників. Рівнобедрений трикутник, його властивість та ознака
§ 12. Медіана, бісектриса й висота трикутника. Властивості та ознаки рівнобедреного трикутника, пов'язані з ними
§ 13. Третя ознака рівності трикутників та її застосування
§ 14. Кути, утворені при перетині двох прямих січною. Ознаки паралельності прямих
§ 15. Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною
§ 16. Сума кутів трикутника. Зовнішній кут трикутника
§ 17. Прямокутні трикутники. Ознаки та властивості прямокутних трикутників
§ 18. Співвідношення між сторонами і кутами трикутника. Нерівність трикутника



www.e-ranok.com.ua

Серед рівних розумом — за однакових
інших умов — переважає той,
хто знає геометрію.

Блез Паскаль, французький учений

Роль трикутника в геометрії важко переоцінити. Науковці недарма називають трикутники клітинами організму геометрії. Справді, чимало зі складніших геометричних фігур можна розбити на трикутники.

У цьому розділі ми не тільки вивчимо «внутрішню будову» трикутників і виділимо їхні види, але й доведемо ознаки, за якими можна встановити рівність трикутників, порівнюючи їхні сторони та кути. Отримані в ході наших міркувань теореми та співвідношення розширять ваші уявлення про відрізки й кути, паралельність і перпендикулярність прямих на площині.

У процесі розв'язування задач і доведення теорем про властивості трикутників ви маєте опанувати важливі геометричні методи, що допоможуть у подальшому вивченні геометрії.

www.e-ranok.com.ua

§7 Трикутник і його елементи. Рівність геометричних фігур

7.1. Означення трикутника і його елементів

Означення

Трикутником називається геометрична фігура, що складається з трьох точок (**вершин трикутника**), які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків (**сторін трикутника**), що попарно сполучають ці точки.

Трикутник позначається знаком $\triangle$ і переліком його вершин у довільній послідовності.

На рис. 54 зображено трикутник із вершинами A, B, C і сторонами AB, BC, AC. Цей трикутник можна позначити так: $\triangle ABC$, $\triangle BAC$, $\triangle CBA$ тощо.

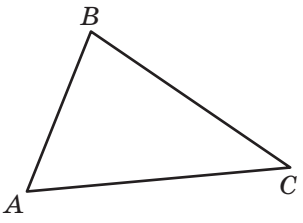


Рис. 54. Трикутник ABC

Означення

Кутом трикутника ABC при вершині A називається кут BAC.

Кут трикутника позначають трьома буквами (наприклад, «кут ABC») або однією буквою, що вказує його вершину (наприклад, «кут A трикутника ABC»).

Якщо вершина даного кута трикутника не належить якійсь стороні, то кажуть, що даний кут ***протилежний цій стороні***. В іншому разі кут є ***прилеглим до сторони***. Так, у трикутнику ABC кут A — прилеглий до сторін AB та AC і протилежний стороні BC.

Сторони й кути трикутника часто називають його **елементами.**

www.e-ranok.com.ua

Периметр — від грецького «пері» — навколо і «метрео» — вимірюю — вимірюваний навколо

Означення

Периметром трикутника називається сума всіх його сторін.

Периметр позначається буквою P.

За означенням, $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC$.

Будь-який трикутник обмежує частину площини. Вважатимемо, що точки, які належать цій частині, розміщені ***всередині трикутника***, а точки, які їй не належать,— ***поза трикутником***.

7.2. Рівність геометричних фігур. Рівні трикутники

Згідно з раніше даними означеннями, два відрізки (кути) називаються **рівними,** якщо вони суміщаються накладанням. Узагальнимо це означення для довільних фігур.

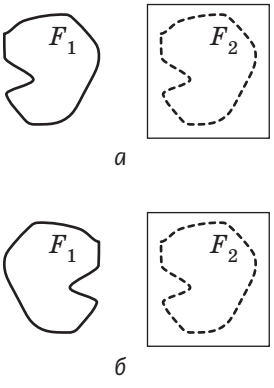


Рис. 55. Фігури F_1 і F_2 суміщаються накладанням

Означення

Дві геометричні фігури називаються **рівними**, якщо вони суміщаються накладанням.

На рисунку 55 зображено фігури F_1 і F_2. Якщо уявити, що фігуру F_2 зображено на прозорій плівці, то за допомогою накладання цієї плівки на фігуру F_1 (тим чи іншим боком, рис. 55, *а*, *б*) можна сумістити фігури F_1 і F_2. У такому випадку фігури F_1 і F_2 за означенням рівні. Для позначення рівності фігур використовують знак математичної рівності «=». Запис $F_1 = F_2$ означає «фігура F_1 дорівнює фігурі F_2».

Розглянемо рівні трикутники[1] ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 56).

[1] Існування трикутника, що дорівнює даному, є однією з аксіом планіметрії. Цю аксіому наведено в додатку 1.

www.e-ranok.com.ua

За означенням, такі трикутники можна сумістити накладанням. Очевидно, що в результаті накладання відповідно сумістяться сторони й кути цих трикутників, тобто кожному елементу трикутника ABC відповідатиме рівний елемент трикутника $A_1B_1C_1$. Домовимося, що в записі $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ ми будемо впорядковувати назви трикутників так, щоб вершини рівних кутів зазначалися в порядку відповідності. Це означає: ***якщо*** $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, ***то*** $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$.

Таким чином, із рівності двох трикутників випливають шість рівностей відповідних елементів: три — для кутів і три — для сторін. На рисунках відповідно рівні сторони зазвичай позначають однаковою кількістю рисок, а відповідно рівні кути — однаковою кількістю дужок (рис. 56).

А чи правильно, що трикутники, які мають відповідно рівні сторони та кути, суміщаються накладанням? Чи можна за рівністю деяких відповідних елементів довести рівність самих трикутників? Відповісти на ці питання спробуємо далі.

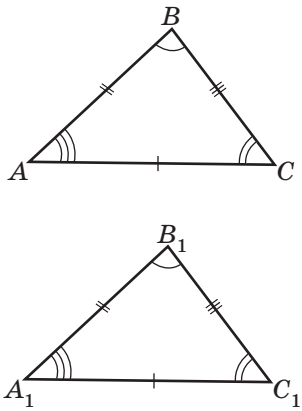


Рис. 56. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні

Запитання й задачі

Усні вправи

176. На прямій позначено три точки. Чи можуть ці точки бути вершинами трикутника?

177. У трикутнику KMP назвіть:

а) кути, прилеглі до сторони MP;

б) кут, протилежний стороні KP;

в) сторону, протилежну куту K;

г) сторони, прилеглі до кута P.

178. Два трикутники рівні. Чи рівні їхні периметри?

www.e-ranok.com.ua

179. Периметри двох трикутників рівні. Чи обов'язково рівні самі трикутники?

180. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Чи означає це, що:

а) $\triangle CAB = \triangle C_1A_1B_1$;

б) $\triangle ABC = \triangle A_1C_1B_1$?

181. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle DEF$. Назвіть:

а) кут, який у результаті накладання трикутників суміститься з кутом E;

б) сторону, яка в результаті накладання трикутників суміститься зі стороною AC;

в) кут, який дорівнює куту C;

г) сторону, що дорівнює стороні DE.

Графічні вправи

182. Накресліть трикутник ABC.

а) Виміряйте сторони трикутника та обчисліть його периметр.

б) Виріжте побудований трикутник і за допомогою отриманого шаблона накресліть трикутник, що дорівнює даному (або скопіюйте побудований трикутник на екрані комп'ютера). Чому трикутники будуть рівними?

183. Накресліть трикутник ABC і виріжте його.

а) За допомогою отриманого шаблона накресліть трикутник MNK, що дорівнює трикутнику ABC.

б) Прикладіть шаблон до трикутника MNK так, щоб відрізки MN і AB сумістились, а точки C і K лежали по різні боки від прямої AB. Обведіть шаблон.

в) Перегніть рисунок по прямій AB. Чи обов'язково точки C і K мають збігтися?

Письмові вправи

Рівень А

184. У трикутнику ABC $AC = 6$ см, сторона AB менша, ніж BC, на 2 см, а сторони, прилеглі до кута C, рівні. Знайдіть периметр трикутника.

www.e-ranok.com.ua

185. Периметр трикутника ABC дорівнює 24 м, причому $AB = 10$ м, а сторона BC втричі менша, ніж AC. Назвіть кут трикутника, протилежний його найбільшій стороні.

186. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle KMN$. Знайдіть:

а) кут N, якщо $\angle C = 125°$;

б) сторону AB, якщо $KM = 11$ см;

в) периметр трикутника KMN, якщо $AB = 11$ см, $MN = 8$ см, $KN = 7$ см.

187. Відомо, що $\triangle BAC = \triangle EFK$.

а) Назвіть найбільший кут трикутника BAC, якщо найбільший кут трикутника EFK є протилежним стороні EF.

б) Назвіть найменшу сторону трикутника EFK, якщо $AB > BC > AC$.

в) Назвіть трикутник, що дорівнює трикутнику ABC.

188. На рис. 57 трикутник ABC дорівнює трикутнику з вершинами в точках P, Q, R. Закінчіть рівність $\triangle ABC = \triangle \ldots$.

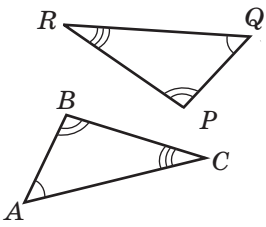


Рис. 57

189. Трикутник ABC дорівнює трикутнику з вершинами в точках X, Y, Z. Запишіть рівність цих трикутників, якщо $AB = YZ$, $BC = ZX$, $AC = YX$.

Рівень Б

190. Точки A, B і C лежать на одній прямій, а точка D не лежить на прямій AC. Скільки трикутників із вершинами в даних точках можна побудувати? Зробіть рисунок.

191. У трикутнику ABC $AB : BC : AC = 3 : 5 : 7$. Знайдіть:

а) периметр трикутника, якщо $BC = 15$ мм;

б) найменшу сторону трикутника, якщо його периметр дорівнює 60 мм;

в) найбільшу сторону трикутника, якщо різниця двох інших його сторін дорівнює 4 мм.

192. Периметр трикутника ABC дорівнює 18 см, причому $AB + BC = 12$ см, $BC + AC = 13$ см. Назвіть кути, прилеглі до найбільшої сторони трикутника.

193. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle DEF = \triangle KMN$, причому $\angle A = 45°$, $\angle F = 80°$, $\angle M = 55°$. Знайдіть невідомі кути цих трикутників.

www.e-ranok.com.ua

194. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle DEF = \triangle KMN$, причому $AB = 9$ см, $MN = 8$ см, $P_{\triangle DEF} = 24$ см. Знайдіть невідомі сторони цих трикутників.

195. Чи можуть бути рівними трикутники, у яких найбільші кути не рівні? Відповідь обґрунтуйте.

196. Якщо периметри двох трикутників не рівні, то й самі трикутники не є рівними. Доведіть.

Рівень В

197. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle KMN$ і $\angle A = \angle N$. Доведіть, що трикутник ABC має рівні кути, і назвіть їх.

198. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle KMN$. Назвіть найменший кут трикутника ABC, якщо в трикутнику KMN $\angle K > \angle N$, а кут, протилежний стороні KM, не найменший.

199. Трикутник ABC дорівнює трикутнику з вершинами в точках X, Y, Z. Запишіть рівність цих трикутників, якщо $\angle A > \angle X$, $\angle A < \angle Z$, $\angle B > \angle Z$.

200. Трикутник ABC дорівнює трикутнику з вершинами в точках X, Y, Z. Запишіть рівність цих трикутників, якщо $AB = YZ$, $\angle A < \angle Y$, а всі сторони трикутника ABC мають різні довжини.

Повторення перед вивченням §8

Теоретичний матеріал

- рівність відрізків
- рівність кутів
- умова й висновок теореми

пп. 2.2; 3.2

п. 4.3

Задачі

201. На сторонах рівних кутів B і B_1 відкладено рівні відрізки $BA = B_1A_1$ і $BC = B_1C_1$. У результаті накладання кути B і B_1 та відрізки BA і B_1A_1 сумістилися. Чи сумістяться в результаті такого накладання відрізки BC і B_1C_1?

202. Спільна сторона двох суміжних кутів ділить кут між бісектрисами цих кутів навпіл. Доведіть, що дані кути прямі.

www.e-ranok.com.ua

§8 Перша ознака рівності трикутників та її застосування

8.1. Перша ознака рівності трикутників

Згідно з означенням рівних фігур два трикутники є рівними, якщо вони суміщаються накладанням. Але на практиці накласти один трикутник на другий не завжди можливо. Наприклад, у такий спосіб не можна порівняти дві земельні ділянки. Отже, виникає необхідність звести питання про рівність трикутників до порівняння їхніх сторін і кутів. Але чи треба для встановлення рівності порівнювати всі шість елементів трикутників? Якщо ні, то які саме елементи двох трикутників мають бути відповідно рівними, щоб ці трикутники були рівними? Відповідь на це питання дають ***ознаки рівності трикутників.***

Доведемо першу з цих ознак.

Теорема (перша ознака рівності трикутників — за двома сторонами й кутом між ними)

Якщо дві сторони й кут між ними одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

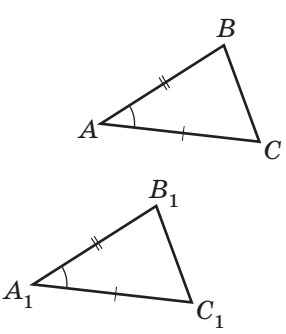


Рис. 58. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за двома сторонами й кутом між ними

Доведення

□ Нехай дано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 58). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Оскільки $\angle A = \angle A_1$, то трикутник $A_1B_1C_1$ можна накласти на трикутник ABC так, щоб точки A і A_1 сумістилися, а сторони A_1B_1 і A_1C_1 наклалися на промені AB і AC відповідно. За умовою $AB = A_1B_1$ і $AC = A_1C_1$, отже, сторона A_1B_1 суміститься зі стороною AB,

www.e-ranok.com.ua

а сторона A_1C_1 — зі стороною AC. Таким чином, точка B_1 суміститься з точкою B, а точка C_1 — з точкою C, тобто сторони B_1C_1 і BC також сумістяться. Отже, у результаті накладання трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ сумістяться повністю. Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за означенням. Теорему доведено. ■

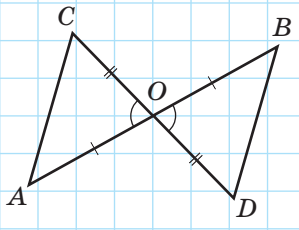


Рис. 59

Задача

Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, яка є серединою кожного з них. Доведіть рівність трикутників AOC і BOD (рис. 59).

Розв'язання

У трикутниках AOC і BOD $AO = BO$ і $CO = DO$ за умовою, $\angle AOC = \angle BOD$ за теоремою про вертикальні кути. Таким чином, $\Delta AOC = \Delta BOD$ за першою ознакою рівності трикутників.

Практичне значення доведеної теореми очевидне з такого прикладу.

Нехай на місцевості необхідно визначити відстань між точками A і C, прямий прохід між якими неможливий (рис. 60). Один зі способів вимірювання такий: на місцевості обирають певну точку O, до якої можна дістатися з точок A, C, B, D, і на променях AO і CO відкладають відрізки $BO = AO$ і $DO = CO$.

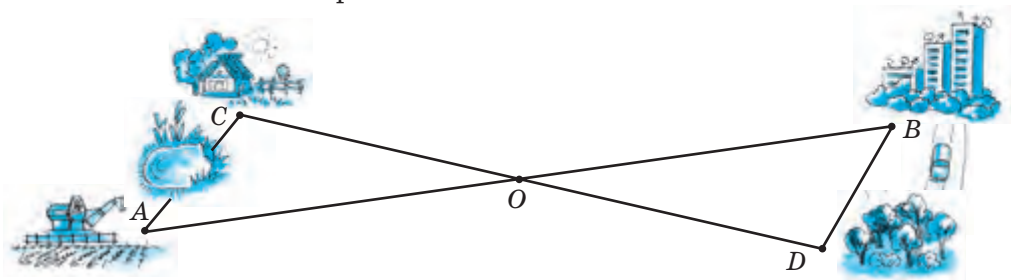


Рис. 60. Визначення відстані на місцевості за допомогою першої ознаки рівності трикутників

www.e-ranok.com.ua

Тоді, відповідно до попередньої задачі, $\triangle AOC = \triangle BOD$ за першою ознакою рівності трикутників. Тоді шукана відстань AC дорівнює відстані BD, яку можна виміряти.

8.2. Спростування тверджень. Контрприклад

Проаналізуємо першу ознаку рівності трикутників. Згідно з нею, для доведення рівності двох трикутників достатньо довести рівність трьох пар відповідних елементів — двох сторін і кута між ними. Вимога щодо того, щоб рівні кути обов'язково лежали між рівними сторонами, є дуже важливою.

Справді, розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 61). Вони не є рівними, хоча мають дві пари відповідно рівних сторін ($AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$), оскільки рівні кути C і C_1 лежать не між рівними сторонами.

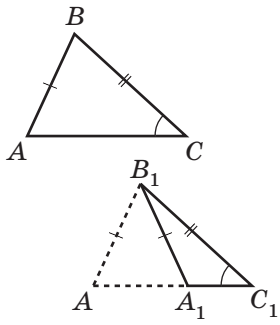


Рис. 61. Дві сторони й кут двох трикутників відповідно рівні, але самі трикутники не рівні

За допомогою наведеного прикладу ми показали, що твердження «Якщо дві сторони й певний кут одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і певному куту другого трикутника, то такі трикутники рівні» є хибним. Інакше кажучи, ми спростували це твердження конкретним прикладом. Такий приклад, за допомогою якого можна показати, що якесь загальне твердження є неправильним, називається **контрприкладом.** Принцип побудови контрприкладу для спростування хибного твердження досить простий: потрібно змоделювати ситуацію, коли умова твердження виконується, а висновок — ні.

Контрприклад — від латинського «контра» — проти

Зобразимо схематично спростування твердження за допомогою контрприкладу.

ТВЕРДЖЕННЯ	КОНТРПРИКЛАД
Якщо А, то В	А, але не В

www.e-ranok.com.ua



Контрприклади використовуються тільки для спростування неправильних тверджень, але не для доведення правильних. Зауважимо також, що не будь-яке хибне твердження можна спростувати контрприкладом. Якщо для спростування певного твердження не вдалося дібрати контрприклад, це не означає, що твердження обов'язково є правильним.

Спростування тверджень за допомогою контрприкладів застосовується не тільки в математиці. Нехай, наприклад, дехто стверджує, що всі птахи, які водяться в Україні, восени летять у вирій. Це твердження можна спростувати, навівши як контрприклад горобців. А спростувати твердження «В українській мові немає іменника, у якому йдуть п'ять приголосних поспіль» можна за допомогою самого слова «контрприклад».

Запитання й задачі

Усні вправи

203. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$ і $BC = B_1C_1$. Яку рівність необхідно додати до умови, щоб рівність даних трикутників можна було довести за першою ознакою?

204. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$ і $\angle C = \angle C_1$. Яку рівність необхідно додати до умови, щоб рівність даних трикутників можна було довести за першою ознакою?

205. Чи можна стверджувати, що $\triangle ABC = \triangle DEF$, якщо $AB = DE$, $AC = DF$, $\angle A = \angle E$?

206. Якщо сума двох сторін і кут між ними одного трикутника відповідно дорівнюють сумі двох сторін і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні. Чи є правильним це твердження? Наведіть контрприклад.

www.e-ranok.com.ua

Графічні вправи

207. Накресліть дві прямі, що перетинаються в точці O.
а) Відкладіть на одній прямій по різні боки від точки O рівні відрізки OA і OB, а на другій — рівні відрізки OC і OD.
б) Сполучіть послідовно точки A, C, B і D. Виділіть кольором пари рівних трикутників. Як довести їх рівність?

208. Накресліть трикутник ABC.
а) Від променя AC відкладіть кут CAM, що дорівнює куту CAB, так, щоб точки B і M лежали по різні боки від прямої AC.
б) На промені AM відкладіть відрізок AD, що дорівнює відрізку AB. Сполучіть точки D і C.
в) Доведіть рівність трикутників ABC і ADC за першою ознакою рівності трикутників. Як треба перегнути рисунок, щоб довести рівність цих трикутників за означенням?

Письмові вправи

Рівень А

209. За даними рис. 62 доведіть рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

210. На рис. 63 $\angle BAC = \angle DAC$, $AB = AD$. Доведіть рівність трикутників ABC і ADC.

211. На рис. 64 $\angle ABD = \angle CDB$, $AB = CD$. Доведіть рівність трикутників ABD і CDB.

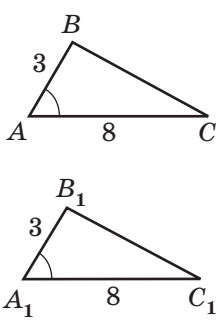


Рис. 62

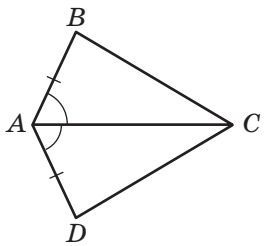


Рис. 63

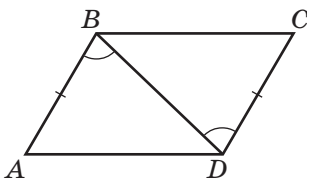


Рис. 64

www.e-ranok.com.ua

212. Через точку D — середину відрізка AB — проведено пряму CD, перпендикулярну до AB.

а) Доведіть рівність трикутників ACD і BCD.

б) Знайдіть довжину відрізка BC, якщо $AC = 8$ см.

213. У трикутнику ABC $AB = CB$, $\angle A = \angle C$. Точка M — середина сторони AC.

а) Доведіть рівність трикутників ABM і CBM.

б) Знайдіть кут ABM, якщо $\angle CBM = 25°$.

214. За допомогою рисунка-контрприкладу спростуйте твердження:

а) якщо точка C лежить на промені AB, то вона лежить між точками A і B;

б) якщо два рівні кути мають спільну вершину, то ці кути вертикальні.

215. За допомогою рисунка-контрприкладу спростуйте твердження:

а) якщо промінь OC ділить тупий кут AOB на два кути, то обидва ці кути є гострими;

б) якщо два промені не перетинаються, то вони паралельні.

Рівень Б

216. На рис. 65 $AD = AE$, $BD = CE$. Доведіть, що $\angle B = \angle C$.

217. На рис. 66 точка C — середина відрізка AE, $AB = DE$, $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $BC = DC$.

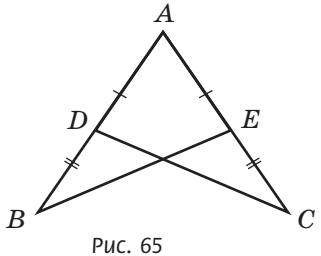


Рис. 65

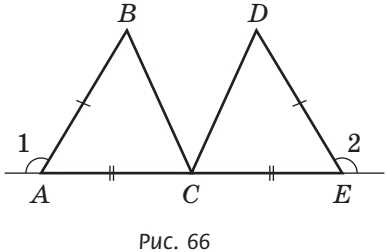


Рис. 66

218. У трикутнику ABC $\angle A = \angle C$. На сторонах AB і BC відкладено рівні відрізки AA_1 і CC_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка AC_1, якщо $CA_1 = 14$ см.

219. У трикутнику ABC $AB = CB$. Бісектриса кута B перетинає сторону AC в точці D. Знайдіть довжину відрізка AD, якщо $AC = 8$ см.

www.e-ranok.com.ua

220. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. На сторонах AB і A_1B_1 відкладено рівні відрізки AD і A_1D_1 відповідно. Доведіть, що $\triangle ACD = \triangle A_1C_1D_1$.

221. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Точки D і E — середини сторін AB і BC, а точки D_1 і E_1 — середини сторін A_1B_1 і B_1C_1 відповідно. Доведіть, що $DE = D_1E_1$.

222. За допомогою рисунка-контрприкладу спростуйте твердження:

а) якщо пряма паралельна стороні трикутника, то вона перетинає дві інші його сторони;

б) якщо два кути мають спільну сторону й у сумі складають $180°$, то ці кути суміжні.

223. За допомогою рисунка-контрприкладу спростуйте твердження:

а) якщо пряма перетинає один із двох паралельних променів, то вона перетинає і другий промінь;

б) якщо бісектриси двох кутів є доповняльними променями, то ці кути вертикальні.

Рівень В

224. У трикутнику ABC $AB = CB$. Бісектриса кута B перетинає сторону AC в точці D. Доведіть, що прямі AC і BD перпендикулярні.

225. Через середину відрізка AB проведено пряму l, перпендикулярну до прямої AB. Доведіть, що кожна точка прямої l рівновіддалена (лежить на однаковій відстані) від точок A і B.

Повторення перед вивченням §9

Теоретичний матеріал

- теорема про суміжні кути та її наслідки
- перпендикулярні прямі

пп. 5.2; 6.3

Задачі

226. Уявіть, що на рисунку зображено пару суміжних кутів і їхні бісектриси. Яка найбільша кількість прямих кутів може бути на такому рисунку?

227. На стороні BC трикутника ABC позначено точку M, причому $\triangle BAM = \triangle CAM$. Знайдіть градусні міри кутів AMB і AMC.

www.e-ranok.com.ua

§9 Перпендикуляр до прямої. Відстань від точки до прямої

9.1. Існування і єдиність прямої, яка проходить через дану точку перпендикулярно до даної прямої

Ознаки рівності трикутників застосовуються не тільки для розв'язування задач, але й для доведення нових геометричних тверджень, зокрема й тих, у формулюваннях яких не згадується трикутник. Доведемо за допомогою першої ознаки рівності трикутників теорему про пряму, що проходить через дану точку площини перпендикулярно до даної прямої.

Теорема (про існування і єдиність перпендикулярної прямої)

Через будь-яку точку площини можна провести пряму, перпендикулярну до даної, і тільки одну.

Перш ніж доводити цю теорему, проаналізуємо її формулювання. Теорема містить два твердження:

1) існує пряма, що проходить через дану точку площини і є перпендикулярною до даної прямої;

2) така пряма єдина.

Перше твердження теореми говорить про ***існування*** прямої з описаними властивостями, друге — про її ***єдиність***. Кожне з цих тверджень необхідно довести окремо.

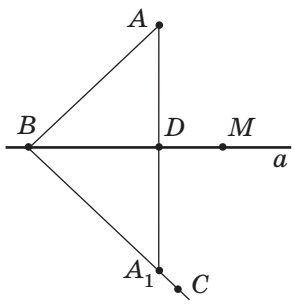


Рис. 67. Пряма AA_1 проходить через точку A і перпендикулярна до прямої a

Доведення

□ Розглянемо спочатку випадок, коли дана точка не лежить на даній прямій.

1) ***Існування***. Нехай дано пряму a і точку A, що не лежить на даній прямій. Оберемо на прямій a точки B і M так, щоб кут ABM був гострим (рис. 67).

www.e-ranok.com.ua

За допомогою транспортира відкладемо від променя BM кут CBM, що дорівнює ABM, так, щоб точки A і C лежали по різні боки від прямої a. На промені BC відкладемо відрізок BA_1, що дорівнює відрізку BA, і сполучимо точки A і A_1. Нехай D — точка перетину відрізка AA_1 з прямою a.

Розглянемо трикутники ABD і A_1BD. Вони мають спільну сторону BD, а $\angle ABD = \angle A_1BD$ і $BA = BA_1$ за побудовою. Таким чином, $\triangle ABD = \triangle A_1BD$ за першою ознакою рівності трикутників. Звідси випливає, що $\angle ADB = \angle A_1DB$. Але ці кути суміжні, тому за теоремою про суміжні кути $\angle ADB = \angle A_1DB = 180^\circ : 2 = 90^\circ$. Отже, пряма AA_1 перпендикулярна до прямої a.

2) ***Єдиність.*** Застосуємо метод доведення від супротивного.

Нехай через точку A проходять дві прямі b і b_1, перпендикулярні до прямої a (рис. 68). Тоді за теоремою про дві прямі, перпендикулярні до третьої, $b \parallel b_1$. Але це неможливо, оскільки прямі b і b_1 мають спільну точку A. Отже, наше припущення хибне, тобто пряма, що проходить через точку A перпендикулярно до прямої a, єдина.

Тепер розглянемо випадок, коли точка A лежить на прямій a. Від будь-якої півпрямої прямої a з початковою точкою A можна відкласти прямий кут (рис. 69). Звідси випливає існування перпендикулярної прямої, що містить сторону цього кута.

Доведення єдиності такої прямої повторює доведення, подане вище. Теорему доведено. ■

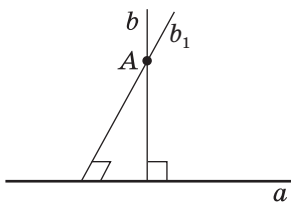


Рис. 68. До припущення про те, що прямі b і b_1 перпендикулярні до прямої a і проходять через точку A

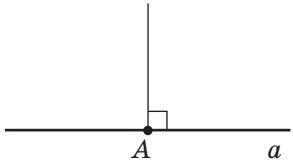


Рис. 69. Від будь-якої півпрямої прямої a можна відкласти прямий кут

Твердження про існування і єдиність уже зустрічалися нам в аксіомах, але необхідність доводити їх виникла вперше. У математиці існує ціла низка теорем, аналогічних доведеній (їх називають ***теоремами існування і єдиності***). Загальний

www.e-ranok.com.ua



підхід до таких теорем полягає в окремому доведенні кожного з двох тверджень.

Необхідність двох окремих етапів доведення жартома можна пояснити так: твердження «У дракона є голова» не означає, що ця голова єдина. Доведення існування певної геометричної фігури, як правило, описує спосіб її отримання. Єдиність зазвичай доводять методом від супротивного.

9.2. Перпендикуляр. Відстань від точки до прямої

Означення

Перпендикуляром до даної прямої, проведеним із точки *A*, називається відрізок прямої, перпендикулярної до даної, одним із кінців якого є точка A, а другим (**основою перпендикуляра**) — точка перетину цих прямих.

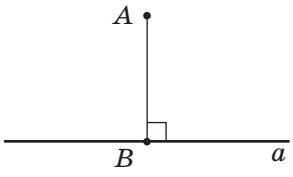


Рис. 70. Відрізок AB — перпендикуляр до прямої a

На рис. 70 відрізок AB є перпендикуляром до прямої a, проведеним із точки A. Точка B — основа цього перпендикуляра. Оскільки за попередньою теоремою через точку A можна провести єдину пряму, перпендикулярну до прямої a, то відрізок AB — єдиний перпендикуляр до прямої a, проведений із точки A.

З доведеної теореми випливає, що ***з точки, яка не лежить на даній прямій, можна провести до даної прямої перпендикуляр, і тільки один.***

Це твердження називають ***теоремою про існування і єдиність перпендикуляра до прямої.***

Означення

Відстанню від точки до прямої, яка не проходить через дану точку, називається довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної прямої.

www.e-ranok.com.ua

Іноді відстанню від точки до прямої називають сам цей перпендикуляр. Таким чином, відрізок AB (див. рис. 70) є відстанню від точки A до прямої a.

Задача

Точки A і C лежать по один бік від прямої a, AB і CD — відстані від цих точок до прямої a, причому $AB = CD$ (рис. 71). Доведіть, що $AD = CB$.

Розв'язання

Розглянемо трикутники ABD і CDB. У них сторона BD спільна, $AB = CD$ за умовою. За означенням відстані від точки до прямої AB і CD — перпендикуляри до прямої a, тобто $\angle ABD = \angle CDB = 90°$. Тоді $\Delta ABD = \Delta CDB$ за першою ознакою рівності трикутників. Із цього випливає, що $AD = CB$, що й треба було довести.

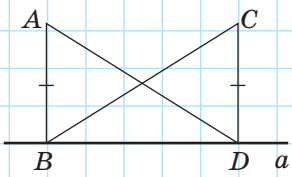


Рис. 71

Запитання й задачі

Усні вправи

228. Чи можуть два кути трикутника бути прямими? Чому?

229. На прямій позначено точку. Скільки через цю точку можна провести:

а) прямих, перпендикулярних до даної прямої;

б) перпендикулярів до даної прямої?

Чи зміняться відповіді, якщо точка не лежатиме на даній прямій?

230. Серед геометричних фігур із заданими властивостями вкажіть ті, які існують і є єдиними:

а) промінь, доповняльний до даного променя;

б) відрізок, який дорівнює даному відрізку;

в) кут, суміжний із даним нерозгорнутим кутом;

г) кут, вертикальний із даним нерозгорнутим кутом.

www.e-ranok.com.ua

231. Серед геометричних фігур із заданими властивостями вкажіть ті, які існують, але не є єдиними:

а) пряма, паралельна даній прямій;

б) пряма, що проходить через точку поза даною прямою і є паралельною даній прямій;

в) точка, що є кінцем даного відрізка;

г) точка, що ділить даний відрізок навпіл.

Графічні вправи

232. Проведіть пряму a і позначте точку A, що не лежить на цій прямій.

а) За допомогою косинця проведіть через точку A перпендикуляр AB до даної прямої.

б) Виміряйте відстань від точки A до прямої a.

в) Позначте на даній прямій точку C, яка не збігається з точкою B. Виміряйте відрізок AC і порівняйте його довжину з довжиною відрізка AB. Висловте припущення про порівняння довжини відрізка AB і довжин інших відрізків, що сполучають точку A з точками прямої a.

233. Проведіть пряму b і позначте на ній точку B.

а) За допомогою косинця проведіть через точку B пряму, перпендикулярну до прямої b, і позначте на ній точку A.

б) На прямій b по різні боки від точки B відкладіть рівні відрізки BC і BD. Сполучіть точки C і D з точкою A. Чи рівні трикутники ABC і ABD? Чому?

Письмові вправи

Рівень А

234. У трикутнику ABC $\angle B = 90°$. Назвіть відрізок, який є відстанню:

а) від точки C до прямої AB;

б) від точки A до прямої BC.

235. Точки A, B і C не лежать на одній прямій. Відрізок AD — відстань від точки A до прямої BC. Який відрізок є відстанню від точки C до прямої AD?

www.e-ranok.com.ua

236. Через точку на площині проведено три прямі. Скільки прямих кутів може при цьому утворитися? Розгляньте всі можливі випадки.

237. Відрізки AC і BC — перпендикуляри, проведені з точок A і B до прямої c. Чи можуть точки A, B і C не лежати на одній прямій? Відповідь обґрунтуйте.

Рівень Б

238. Точка A лежить на прямій a, а точка B — на прямій b. Відрізок AB — відстань від точки A до прямої b і відстань від точки B до прямої a. Визначте взаємне розміщення прямих a і b. Відповідь обґрунтуйте.

239. На площині дано точки A, B, C, D, E. Визначте, які чотири з цих точок лежать на одній прямій, якщо BD — відстань від точки B до прямої AC, а ED — відстань від точки E до прямої BD.

240. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle KMN$ і відрізок AC — відстань від точки A до прямої BC. Який відрізок є відстанню:

а) від точки K до прямої MN;

б) від точки M до прямої KN?

241. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle ABC_1$ і точка B лежить на відрізку CC_1. Який відрізок є відстанню:

а) від точки A до прямої CC_1;

б) від точки C до прямої AB?

Рівень В

242. Точка D лежить усередині нерозгорнутого кута B. Відрізки DA і DC — відстані від точки D до сторін кута, причому $DA = DC$ і $BA = BC$. Доведіть, що промінь BD — бісектриса кута B.

243. Точка C — середина відрізка AB, відрізок DC — відстань від точки D до прямої AB. Доведіть, що промінь DC — бісектриса кута ADB.

244. Відстані від селищ Антонівка і Вільне до прямої автомагістралі дорівнюють 5 км і 7 км відповідно. Чи може відстань між Антонівкою і Вільним дорівнювати 12 км; 2 км? Відповідь обґрунтуйте.

245. Відрізки AA_1 і BB_1 — відстані від точок A і B до прямої c. За якої умови прямі AB і c будуть перпендикулярними? Відповідь обґрунтуйте.

www.e-ranok.com.ua

Повторення перед вивченням § 10

Теоретичний матеріал

- означення трикутника та його елементів
- рівні трикутники

пп. 7.1; 7.2

Задачі

246. У трикутнику ABC точка M — середина сторони BC. Даний трикутник перегнули по прямій AM, причому кути AMB і AMC та відрізки MB і MC сумістилися. Чи сумістяться за таких умов кути AMB і ACM; відрізки AB і AC?

247. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. На сторонах BC і B_1C_1 позначено точки M і M_1 відповідно, причому $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$. Доведіть рівність трикутників ACM і $A_1C_1M_1$.

www.e-ranok.com.ua

§10 Друга ознака рівності трикутників та її застосування

10.1. Друга ознака рівності трикутників

У першій ознаці рівності трикутників рівність двох трикутників було доведено за трьома елементами: двома сторонами та кутом між ними. Однак це не єдиний можливий набір елементів, рівність яких гарантує рівність трикутників. Ще один такий набір — це сторона і прилеглі до неї кути.

Теорема (друга ознака рівності трикутників — за стороною та прилеглими до неї кутами)

Якщо сторона та прилеглі до неї кути одного трикутника відповідно дорівнюють стороні та прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Доведення

□ Нехай дано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 72). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Оскільки $AC = A_1C_1$, то трикутник $A_1B_1C_1$ можна накласти на трикутник ABC так, щоб сторона AC сумістилася зі стороною A_1C_1, а точки B і B_1 лежали по один бік від прямої AC. За умовою $\angle A = \angle A_1$ і $\angle C = \angle C_1$, тому сторона A_1B_1 накладеться на промінь AB, а сторона C_1B_1 — на промінь CB. Тоді точка B_1 — спільна точка сторін A_1B_1 і C_1B_1 — лежатиме як на промені AB, так і на промені CB, тобто суміститься зі спільною точкою цих променів — точкою B. Таким чином, сумістяться сторони AB і A_1B_1, а також BC

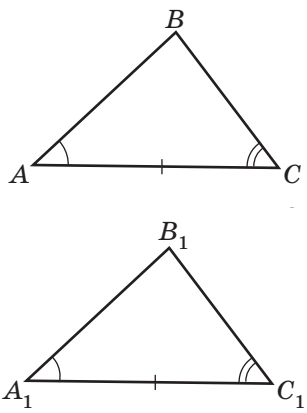


Рис. 72. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за стороною та прилеглими до неї кутами

www.e-ranok.com.ua

і B_1C_1. Отже, у результаті накладання трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ сумістяться повністю, тобто за означенням $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Теорему доведено. ■

10.2. Розв'язування геометричних задач «від кінця до початку»

Розглянемо приклад застосування другої ознаки рівності трикутників для розв'язування задачі.

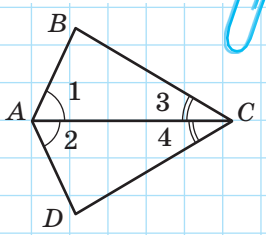


Рис. 73

Задача

На рис. 73 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Знайдіть кут D, якщо $\angle B = 110°$.

Перш ніж навести розв'язання цієї задачі, спробуємо відповісти на запитання: як саме треба міркувати, щоб знайти шлях до нього?

1) Спочатку проаналізуємо запитання задачі. Нам необхідно знайти градусну міру кута D. Очевидно, що для цього слід використати числові дані. Ми маємо лише одну таку умову: $\angle B = 110°$. Таким чином, можна припустити, що кути B і D мають бути якось пов'язані. Як саме?

2) Зауважимо, що кути B і D є кутами трикутників ABC і ADC відповідно, причому обидва ці кути протилежні стороні AC. Звідси виникає ідея про те, що кути B і D можуть бути рівними і їхня рівність може випливати з рівності трикутників ABC і ADC.

www.e-ranok.com.ua

3) Наступний крок міркувань: чи справді трикутники ABC і ADC рівні? Якщо так, то на підставі якої ознаки можна довести їх рівність? Тут нам допоможуть інші дані задачі — рівності кутів: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Як ви вже знаєте, дві пари відповідно рівних кутів розглядаються у формулюванні другої ознаки рівності трикутників, тобто слід спробувати застосувати саме її.

4) Для остаточного визначення ходу розв'язання задачі лишилося відповісти на запитання: яких ще даних нам бракує для застосування другої ознаки рівності трикутників? Звідки їх можна дістати? Звернемо увагу, що кути 1 і 3 трикутника ABC, а також кути 2 і 4 трикутника ADC є прилеглими до сторони AC, яка, крім того, є спільною стороною цих трикутників.

Отже, шлях визначено, і лишається тільки записати розв'язання, повторюючи міркування у зворотному порядку — від 4-го до 1-го пункту.

Розв'язання

Розглянемо трикутники ABC і ADC. У них сторона AC спільна, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ за умовою, і ці кути є прилеглими до сторони AC. Таким чином, $\Delta ABC = \Delta ADC$ за другою ознакою рівності трикутників.

Кути B і D — відповідно рівні кути рівних трикутників. Отже, $\angle D = \angle B = 110°$.

Відповідь: 110°.

Зазначимо, що в міркуваннях 1)–4) ми починали із запитання задачі, а потім використовували її умови, тобто йшли «від кінця до початку». У багатьох геометричних задачах саме такий спосіб міркувань дозволяє знайти правильний шлях до розв'язання.

www.e-ranok.com.ua

Запитання й задачі

Усні вправи

248. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Яку рівність необхідно додати до умови, щоб рівність цих трикутників можна було довести за другою ознакою?

249. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$ $\angle A = \angle A_1$. Яку рівність необхідно додати до умови, щоб рівність цих трикутників можна було довести за другою ознакою?

250. Чи можна стверджувати, що $\triangle ABC = \triangle DEF$, якщо $AB = DE$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle F$?

251. Якщо сторона і сума прилеглих до неї кутів одного трикутника відповідно дорівнюють стороні й сумі прилеглих до неї кутів другого трикутника, то такі трикутники рівні. Чи правильне це твердження?

Графічні вправи

252. Накресліть гострий кут A і проведіть його бісектрису AD.

а) Від променя DA по різні боки від прямої DA відкладіть рівні кути й позначте точки B і C — точки перетину сторін побудованих кутів зі сторонами кута A.

б) Чи рівні трикутники ABD і ACD? Як це довести?

253. Накресліть тупий кут A і проведіть його бісектрису AD.

а) Проведіть через точку D пряму, перпендикулярну до прямої AD, і позначте точки B і C — точки перетину побудованої прямої зі сторонами кута A.

б) Виділіть кольором рівні трикутники та доведіть їхню рівність.

Письмові вправи

Рівень А

254. За даними рис. 74 доведіть рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

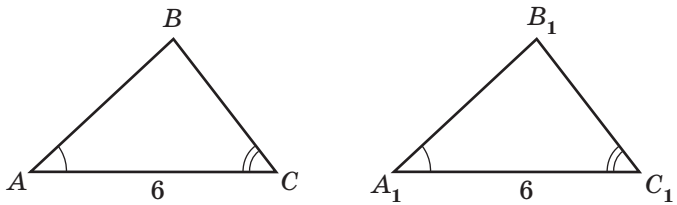


Рис. 74

www.e-ranok.com.ua

255. На рис. 75 $\angle B = \angle C$, $BO = CO$. Доведіть рівність трикутників AOB і DOC.

256. На рис. 76 $\angle ABD = \angle CDB$, $\angle ADB = \angle CBD$. Доведіть рівність трикутників ABD і CDB.

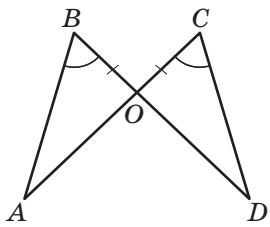


Рис. 75

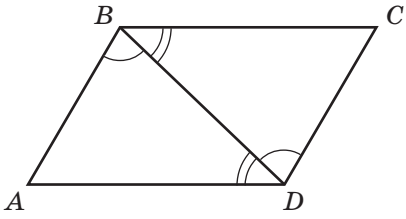


Рис. 76

257. На бісектрисі кута B позначено точку D, а на сторонах кута — точки A і C, причому $\angle ADB = \angle CDB$. Знайдіть довжину відрізка DC, якщо $DA = 8$ см.

258. У трикутнику ABC $AB = CB$, $\angle A = \angle C$. Бісектриса кута B перетинає сторону AC у точці M.

а) Доведіть рівність трикутників ABM і CBM.

б) Доведіть, що прямі AC і BM перпендикулярні.

Рівень Б

259. На рис. 77 $\angle A = \angle F$, $\angle ADE = \angle FCB$, $AD = FC$. Доведіть рівність трикутників ABC і FED.

260. На рис. 78 $\angle BAD = \angle CDA$, $\angle CAD = \angle BDA$. Доведіть рівність трикутників ABD і DCA.

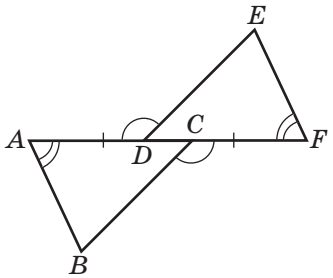


Рис. 77

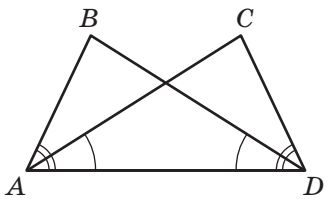


Рис. 78

www.e-ranok.com.ua

261. У трикутнику ABC на рівних сторонах AC і BC позначено точки D і E відповідно, причому $\angle CAE = \angle CBD$. Доведіть, що $AE = BD$.

262. Відрізки AC і BD перетинаються в точці O, яка є серединою відрізка BD, причому $AB \perp BD$, $CD \perp BD$.

а) Доведіть рівність трикутників AOB і COD.

б) Знайдіть довжину відрізка AC, якщо $AO = 4$ см.

263. На бісектрисі нерозгорнутого кута A позначено точку B. Доведіть, що пряма, яка перпендикулярна до бісектриси AB і проходить через точку B, відтинає на сторонах кута рівні відрізки.

Рівень В

264. За допомогою контрприкладу спростуйте твердження: «Якщо сторона і два кути одного трикутника дорівнюють стороні та двом кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні».

265. У п. 8.1 наведено спосіб знаходження відстані між точками A і C на місцевості (див. рис. 60), що ґрунтується на застосуванні першої ознаки рівності трикутників. Запропонуйте інший спосіб знаходження цієї відстані на підставі другої ознаки рівності трикутників.

266. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні. На сторонах AC і A_1C_1 позначено точки D і D_1 відповідно, причому $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$. Доведіть, що $BD = B_1D_1$.

267. На рис. 79 $\triangle ABC = \triangle DCB$. Доведіть, що $\triangle AOB = \triangle DOC$.

268. На рис. 80 $\triangle AOD = \triangle COE$. Доведіть, що $\triangle ABE = \triangle CBD$.

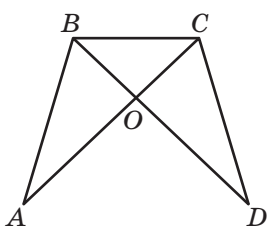


Рис. 79

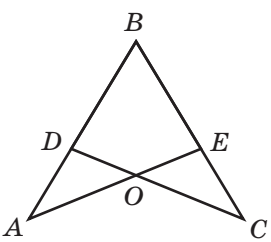


Рис. 80

www.e-ranok.com.ua

Повторення перед вивченням § 11

Теоретичний матеріал

- рівність відрізків
- рівність кутів
- існування і єдиність перпендикуляра до прямої

пп. 2.2; 3.2

п. 9.2

Задачі

269. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle MNK$, $AB = BC$, $NK = MK$. Доведіть, що всі сторони даних трикутників рівні.

270. Точки C і D лежать по різні боки від прямої AB, причому $\angle CAB = \angle DAB$, $\angle CBA = \angle DBA$. Серед трикутників, вершинами яких є дані точки, назвіть ті, що обов'язково мають дві рівні сторони. Відповідь обґрунтуйте.

www.e-ranok.com.ua

§ 11 Види трикутників. Рівнобедрений трикутник, його властивість та ознака

11.1. Види трикутників. Рівнобедрений трикутник

Трикутник, у якого всі сторони різні, називається **різностороннім**. У задачах до попередніх параграфів уже зустрічався трикутник із рівними сторонами. Такі трикутники мають низку особливостей і заслуговують на окремий розгляд.

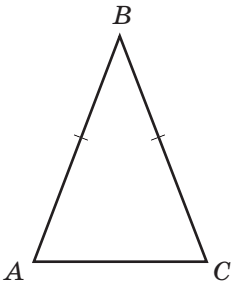


Рис. 81. Трикутник ABC рівнобедрений з основою AC

Означення

Трикутник називається **рівнобедреним**, якщо в нього дві сторони рівні.

Дві рівні сторони рівнобедреного трикутника звуться **бічними сторонами**, а третя сторона — **основою**[1]. На рис. 81 зображено рівнобедрений трикутник ABC з бічними сторонами AB і BC та основою AC.

Означення

Трикутник називається **рівностороннім**, якщо в нього всі сторони рівні.

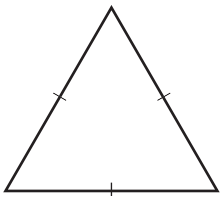


Рис. 82. Рівносторонній трикутник

Зазначимо, що рівносторонній трикутник (рис. 82) також є рівнобедреним, причому будь-які дві його сторони можна вважати бічними.

11.2. Властивість кутів рівнобедреного трикутника

Доведемо властивість рівнобедреного трикутника, яка пов'язує рівність його сторін із рівністю кутів.

[1] Іноді в довільному трикутнику одну зі сторін також називають основою.

www.e-ranok.com.ua

Теорема (властивість кутів рівнобедреного трикутника)

У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

Доведення

□ Нехай дано рівнобедрений трикутник ABC з основою AC. Доведемо, що $\angle A = \angle C$.

Проведемо бісектрису кута B. Нехай вона перетинає сторону AC в точці D (рис. 83). Розглянемо трикутники ABD і CBD. У них сторона BD спільна, $AB = CB$ як бічні сторони рівнобедреного трикутника, $\angle ABD = \angle CBD$ за означенням бісектриси кута. Отже, $\triangle ABD = \triangle CBD$ за першою ознакою рівності трикутників.

Звідси випливає рівність відповідних кутів цих трикутників, тобто $\angle A = \angle C$, що й треба було довести. ■

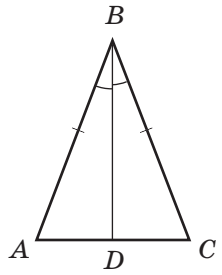


Рис. 83. Промінь BD — бісектриса кута B

Наслідок

У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.

Задача

Доведіть, що середини сторін рівнобедреного трикутника є вершинами іншого рівнобедреного трикутника.

Розв'язання

Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з основою AC, точки D, E, F — середини сторін AB, BC і AC відповідно (рис. 84). Доведемо, що трикутник DEF рівнобедрений. Розглянемо трикутники DAF і ECF. У них $AD = CE$ як половини рівних сторін AB і CB, $AF = CF$ (оскільки за умовою точка F — середина AC), $\angle A = \angle C$ як кути при основі рівнобедреного трикутника ABC. Отже, $\Delta DAF = \Delta ECF$ за першою ознакою рівності трикутників. Тоді $DF = EF$ як відповідні сторони рівних трикутників, тобто трикутник DEF рівнобедрений.

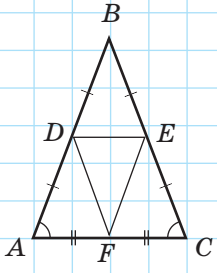


Рис. 84

www.e-ranok.com.ua

11.3. Ознака рівнобедреного трикутника

Із попередньої теореми випливає, що в трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути. Але чи завжди сторони, протилежні рівним кутам, мають бути рівними? Відповімо на це запитання наступною теоремою.

Теорема (ознака рівнобедреного трикутника)

Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.

Доведення

□ Нехай у трикутнику ABC $\angle A = \angle C$. Доведемо, що цей трикутник рівнобедрений.

Через точку D — середину сторони AC — проведемо пряму d, перпендикулярну до AC. Нехай ця пряма перетинає промінь AB в точці B_1 (рис. 85). Сполучимо точки C і B_1 та розглянемо трикутники AB_1D і CB_1D. У них сторона B_1D спільна, $\angle ADB_1 = \angle CDB_1 = 90°$ і $AD = CD$ за побудовою. Таким чином, $\triangle AB_1D = \triangle CB_1D$ за першою ознакою. Звідси $AB_1 = CB_1$, $\angle B_1AD = \angle B_1CD$. Оскільки за побудовою точка B_1 лежить на промені AB, кут B_1AD збігається з кутом A трикутника ABC. Тоді за умовою теореми і за доведеним маємо: $\angle B_1AD = \angle BAD = \angle BCD = \angle B_1CD$. Таким чином, за аксіомою відкладання кутів кути B_1CD і BCD збігаються, тобто точка B_1 лежить і на промені CB. Оскільки промені AB і CB мають єдину точку перетину, точки B і B_1 збігаються, тобто $AB = CB$.

Теорему доведено. ■

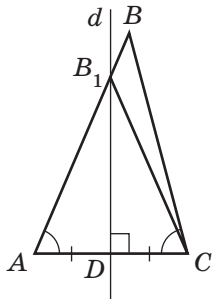


Рис. 85. До доведення ознаки рівнобедреного трикутника

Наслідок (ознака рівностороннього трикутника)

Якщо в трикутнику всі кути рівні, то він рівносторонній.

www.e-ranok.com.ua

Це твердження ілюструє рис. 86. З рівності кутів A, B, C випливає, що трикутник ABC є рівностороннім.

Зазначимо, що тепер ми маємо два шляхи доведення того, що трикутник рівнобедрений:

1) за означенням рівнобедреного трикутника (тобто доведенням рівності двох сторін);
2) за ознакою рівнобедреного трикутника (тобто доведенням рівності двох кутів).

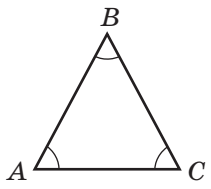


Рис. 86. До ознаки рівностороннього трикутника

Задача

На продовженні основи AC рівнобедреного трикутника ABC позначено точки D і E, причому $AD = CE$ (рис. 87). Доведіть, що трикутник DBE рівнобедрений.

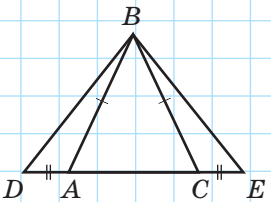


Рис. 87

Розв'язання

Розглянемо трикутники DAB і ECB. У них $AD = CE$ за умовою, $AB = CB$ як бічні сторони рівнобедреного трикутника ABC. За властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника ABC $\angle BAC = \angle BCA$, тоді $\angle DAB = \angle ECB$ як кути, суміжні з рівними кутами. Отже, $\Delta DAB = \Delta ECB$ за першою ознакою рівності трикутників.

Завершити доведення можна одним із двох способів.

1-й спосіб. Оскільки $\Delta DAB = \Delta ECB$, то $BD = BE$. Таким чином, трикутник DBE є рівнобедреним за означенням.

2-й спосіб. Оскільки $\Delta DAB = \Delta ECB$, то $\angle D = \angle C$. Таким чином, трикутник DBE є рівнобедреним за ознакою рівнобедреного трикутника.

www.e-ranok.com.ua

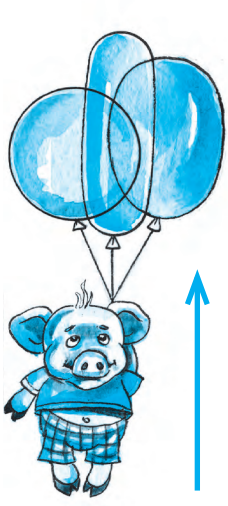
11.4. *Пряма й обернена теореми*



Проаналізуємо дві попередні теореми про рівнобедрений трикутник, виділивши в кожній із них умову й висновок. Властивість кутів рівнобедреного трикутника можна сформулювати так: «Якщо трикутник рівнобедрений, то в ньому два кути (при основі) рівні». Тепер стає очевидним, що умова першої теореми («трикутник рівнобедрений») — це висновок другої, а висновок першої теореми («у трикутнику два кути є рівними») — то умова другої теореми. У такому випадку друга теорема є **оберненою** до першої (**прямої**).

Зобразимо наочно зв'язок прямої і оберненої теорем.

ПРЯМА ТЕОРЕМА	ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМА
Якщо A, то B	Якщо B, то A



Теорема, обернена до даної, не обов'язково справджується. Розглянемо, наприклад, теорему про вертикальні кути, сформулювавши її так: «Якщо два кути вертикальні, то вони рівні». Зрозуміло, що обернена теорема не є правильною: адже якщо два кути рівні, то вони не обов'язково вертикальні.

Чимало подібних прикладів можна навести і з повсякденного життя. Наприклад, якщо учень є семикласником, то він вивчає геометрію. Обернене твердження хибне: якщо учень вивчає геометрію, то він не обов'язково семикласник, бо геометрію вивчають і в старших класах. Спробуйте самостійно знайти приклади прямих і обернених тверджень в інших науках, які вивчаються в школі.

Таким чином, ***користуватися твердженням, оберненим до доведеної теореми, можна лише тоді, коли воно також доведене.***

www.e-ranok.com.ua

Запитання й задачі

Усні вправи

271. Чи є рівнобедреним будь-який рівносторонній трикутник? Чи є рівностороннім будь-який рівнобедрений трикутник?

272. У трикутнику DEF $DE = EF$. Назвіть рівні кути трикутника.

273. У трикутнику KMN $\angle M = \angle N$. Назвіть рівні сторони трикутника.

274. У трикутнику ABC сторони, прилеглі до кута B, рівні, і кути, прилеглі до сторони AB, також рівні. Визначте вид трикутника.

Графічні вправи

275. Накресліть кут B і відкладіть на його сторонах рівні відрізки BA і BC.

а) Сполучіть точки A і C. Чи є трикутник ABC рівнобедреним? Чому?

б) Виміряйте кути A і C трикутника ABC. Зробіть висновок.

276. Накресліть кут A, що дорівнює 60°, і проведіть його бісектрису AD.

а) Проведіть через точку D пряму, перпендикулярну до прямої AD, і позначте точки B і C — точки перетину побудованої прямої зі сторонами кута A.

б) Виміряйте сторони і кути трикутника ABC. Зробіть висновок.

Письмові вправи

Рівень А

277. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 2,6 м. Знайдіть сторони трикутника, якщо його основа більша, ніж бічна сторона, на 0,2 м.

278. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см. Знайдіть:

а) основу трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 7,5 см;

б) бічну сторону трикутника, якщо його основа дорівнює 4 см;

в) сторони трикутника, якщо його бічна сторона відноситься до основи як $3:4$.

www.e-ranok.com.ua

279. Якщо бічна сторона й кут, протилежний основі одного рівнобедреного трикутника, відповідно дорівнюють бічній стороні й куту, протилежному основі другого рівнобедреного трикутника, то такі трикутники рівні. Доведіть.

280. Якщо основа й кут, прилеглий до основи, одного рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють основі й куту, прилеглому до основи, другого рівнобедреного трикутника, то такі трикутники рівні. Доведіть.

281. За даними рис. 88 доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений, і назвіть його бічні сторони.

282. За даними рис. 89 доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений, і назвіть його основу.

283. Трикутники ABD і CBD рівні (рис. 90). Доведіть, що трикутники ABC і ADC рівнобедрені.

284. У рівнобедреному трикутнику ABC точки A_1 і C_1 — середини бічних сторін AB і BC відповідно. Доведіть, що $\angle BA_1C_1 = \angle BC_1A_1$.

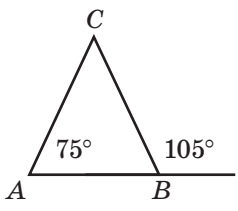


Рис. 88

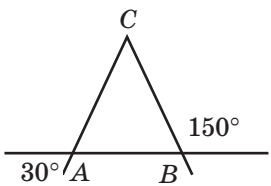


Рис. 89

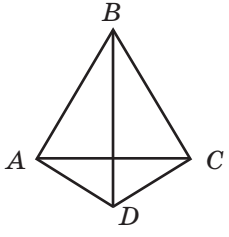


Рис. 90

Рівень Б

285. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 21 м. Знайдіть сторони трикутника, якщо одна з них більша за іншу на 3 м. Скільки розв'язків має задача?

286. Периметр рівнобедреного трикутника ABC дорівнює 18 см, причому основа AC менша за бічну сторону на 3 см. Знайдіть периметр рівностороннього трикутника ADC.

287. У рівнобедреному трикутнику кути, прилеглі до бічної сторони, рівні. Доведіть, що цей трикутник рівносторонній.

288. Доведіть, що середини сторін рівностороннього трикутника є вершинами іншого рівностороннього трикутника.

www.e-ranok.com.ua

289. На рис. 91 $AB = BC$, $CD = DE$. Доведіть, що $\angle BAC = \angle DEC$.

290. Рівнобедрені трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC (рис. 90). Доведіть рівність трикутників ABD і CBD.

291. На продовженнях бічних сторін AB і CB рівнобедреного трикутника ABC відкладено рівні відрізки BA_1 і BC_1 (рис. 92).

а) Доведіть рівність трикутників AC_1B і CA_1B.

б) Доведіть рівність трикутників AC_1C і CA_1A.

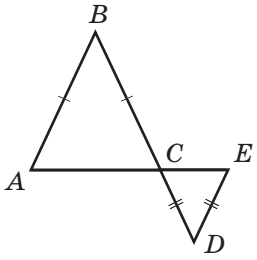


Рис. 91

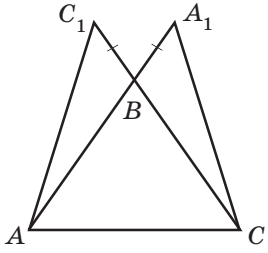


Рис. 92

292. На рис. 93 трикутник ABC рівнобедрений з основою AC, точка D — середина відрізка AC. Доведіть, що трикутник AEC рівнобедрений.

293. На рис. 94 трикутник ADC рівнобедрений з основою AC, $\angle ADE = \angle CDE$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

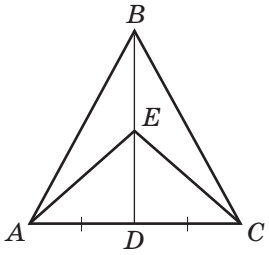


Рис. 93

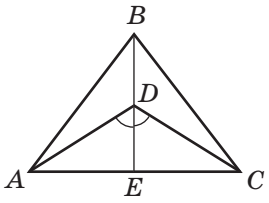


Рис. 94

Рівень В

294. Сформулюйте твердження, обернені:

а) до теореми про суміжні кути;

б) до теореми про дві прямі, паралельні третій;

в) до першої ознаки рівності трикутників.

Які з цих тверджень є правильними?

www.e-ranok.com.ua

295. Проаналізуйте доведення ознаки рівнобедреного трикутника (рис. 85). Чому пряма d не може бути паралельною:

а) кожній із прямих AB і CB;

б) одній із прямих AB або CB?

296. Рівнобедрені трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC (точки B і D лежать по різні боки від прямої AC). Відрізки BD і AC перетинаються в точці K. Доведіть, що точка K — середина відрізка AC.

297. Рівнобедрені трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC (точки B і D лежать по один бік від прямої AC). Доведіть, що прямі BD і AC перпендикулярні.

298. На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC відкладено рівні відрізки AA_1 і CC_1 відповідно. Відрізки AC_1 і CA_1 перетинаються в точці O. Доведіть, що трикутник AOC рівнобедрений.

299. Трикутники ABC і ABD рівні. Доведіть, що їхня спільна сторона перпендикулярна до прямої CD.

Повторення перед вивченням § 12

Теоретичний матеріал

- середина відрізка
- бісектриса кута
- перпендикуляр до прямої

пп. 2.2; 3.2

п. 9.2

Задачі

300. Дано кут AOB. З точки A проведено перпендикуляр AD до прямої OB. Чи лежить точка O між точками B і D, якщо даний кут гострий; тупий?

301. У трикутнику ABC $AB = BC$. Проведіть із вершини B відрізок, що ділить даний трикутник на два рівні трикутники. Які властивості має цей відрізок? Приведіть необхідні доведення, висловіть припущення.

www.e-ranok.com.ua

§ 12 Медіана, бісектриса й висота трикутника. Властивості та ознаки рівнобедреного трикутника, пов'язані з ними

12.1. Означення медіани, бісектриси й висоти трикутника

Крім сторін і кутів, із трикутником пов'язані кілька інших важливих елементів, що мають спеціальні назви.

Означення

Медіаною трикутника називається відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

На рис. 95 відрізок BM є медіаною трикутника ABC. У будь-якому трикутнику можна провести три медіани — по одній із кожної вершини. Далі буде доведено, що всі вони перетинаються в одній точці (рис. 96)[1].

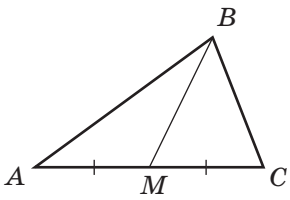
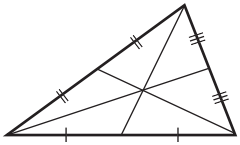


Рис. 95. Відрізок BM — медіана трикутника ABC


Рис. 96. Три медіани трикутника перетинаються в одній точці

Означення

Бісектрисою трикутника називається відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину цього кута з точкою на протилежній стороні.

На рис. 97 відрізок BL — бісектриса трикутника ABC. Звернемо увагу на те, що, на відміну від бісектриси кута, яка є променем, бісектриса трикутника — відрізок. Очевидно, що будь-який трикутник має три бісектриси (рис. 98). Усі вони також перетинаються в одній точці (цей факт буде доведено далі).

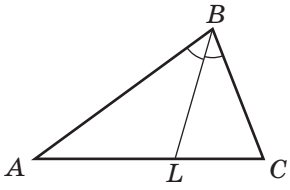
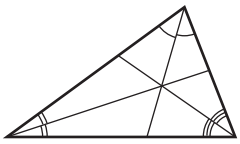


Рис. 97. Відрізок BL — бісектриса трикутника ABC


Рис. 98. Три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці

[1] Наголосимо, що тут і далі, наводячи твердження, які будуть доведені пізніше, ми не будемо посилатися на них до моменту, коли їх буде доведено.

www.e-ranok.com.ua

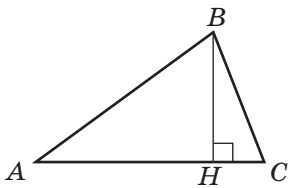


Рис. 99. Відрізок BH — висота трикутника ABC

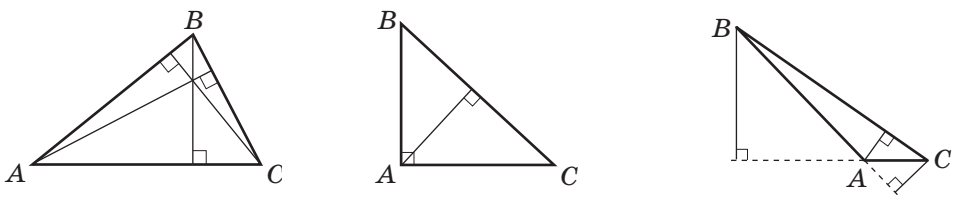
Означення

Висотою трикутника називається перпендикуляр, проведений із вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.

На рис. 99 відрізок BH — висота трикутника ABC.

За теоремою про існування і єдиність перпендикуляра до прямої, з кожної вершини трикутника можна провести тільки одну його висоту. Висоти трикутника не обов'язково лежать усередині нього. На відміну від медіан і бісектрис, деякі з висот можуть збігатися зі сторонами або проходити поза трикутником (рис. 100).

Висоти трикутника (або їхні продовження) перетинаються в одній точці (це твердження доведемо згодом).



Три висоти лежать усередині трикутника

Дві висоти збігаються зі сторонами трикутника

Дві висоти лежать поза трикутником

Рис. 100. Розміщення висот у трикутнику ABC

12.2. Властивість медіани, бісектриси й висоти рівнобедреного трикутника

Теорема (властивість медіани, бісектриси й висоти рівнобедреного трикутника)

У рівнобедреному трикутнику медіана, бісектриса й висота, проведені до основи, збігаються.

Доведення

☐ Доведення цієї теореми складається з трьох частин.

www.e-ranok.com.ua

1) Нехай BD — медіана рівнобедреного трикутника ABC, проведена до основи AC (рис. 101, *а*). Доведемо, що BD є також бісектрисою й висотою трикутника ABC.

Розглянемо трикутники ABD і CBD. У них $AB = CB$ за означенням рівнобедреного трикутника, $\angle A = \angle C$ як кути при основі рівнобедреного трикутника, $AD = CD$ за означенням медіани. Отже, $\triangle ABD = \triangle CBD$ за першою ознакою рівності трикутників. Із цього випливає, що $\angle ABD = \angle CBD$, тобто BD — бісектриса трикутника ABC.

Крім того, $\angle ADB = \angle CDB$, а оскільки ці кути суміжні, то обидва вони прямі. Отже, BD — висота трикутника ABC. Таким чином, відрізок BD — медіана трикутника ABC, проведена до основи, — є також бісектрисою й висотою трикутника.

2) Нехай тепер BD — бісектриса рівнобедреного трикутника ABC, проведена до основи AC (рис. 101, *б*). Аналогічно попередньому випадку можна довести, що BD є також медіаною й висотою трикутника ABC. Справді, у цьому випадку $\triangle ABD = \triangle CBD$ за другою ознакою ($\angle A = \angle C$, $AB = CB$, $\angle ABD = \angle CBD$). Звідси $AD = CD$, тобто BD — медіана трикутника, і $\angle ADB = \angle CDB = 90°$, тобто BD — висота трикутника.

3) Нехай BD — висота трикутника ABC. Доведемо від супротивного, що BD є медіаною й бісектрисою даного трикутника. Нехай існують медіана BD_1 і бісектриса BD_2, які не збігаються з BD. Тоді за доведеним вище відрізки BD_1 і BD_2 також є висотами трикутника. Таким чином, із точки B до прямої AC проведено три різні перпендикуляри, що суперечить теоремі про існування і єдиність перпендикуляра до прямої. Із цієї суперечності випливає, що відрізки BD, BD_1 і BD_2 збігаються, тобто BD — медіана й бісектриса даного трикутника.

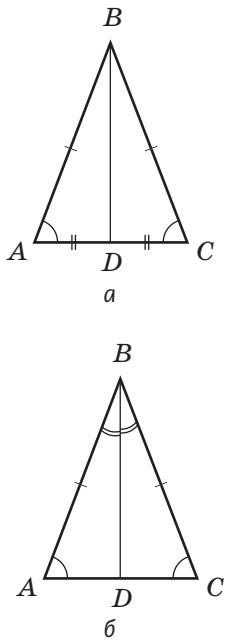


Рис. 101. Відрізок BD — медіана, бісектриса й висота рівнобедреного трикутника ABC

Медіана – від латинського «медіанус» – середній

www.e-ranok.com.ua

Отже, у рівнобедреному трикутнику медіана, бісектриса й висота, проведені до основи, збігаються. Теорему доведено. ■

Наслідок

У рівносторонньому трикутнику медіана, бісектриса й висота, проведені з однієї вершини, збігаються.

Теорема, обернена до даної, також справджується: якщо в трикутнику медіана, бісектриса й висота, проведені з однієї вершини, збігаються, то такий трикутник є рівнобедреним (доведіть це твердження самостійно).

На практиці для розв'язування задач замість доведеної теореми часто використовують твердження про збіг лише двох із трьох зазначених відрізків:

1) ***якщо в трикутнику медіана й висота, проведені з однієї вершини, збігаються, то такий трикутник є рівнобедреним***;
2) ***якщо в трикутнику бісектриса й висота, проведені з однієї вершини, збігаються, то такий трикутник є рівнобедреним***;
3) ***якщо в трикутнику медіана й бісектриса, проведені з однієї вершини, збігаються, то такий трикутник є рівнобедреним.***

Перші два твердження доведіть самостійно. Третє твердження ми розглянемо в п. 12.3.

Задача

Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за кутом, протилежним основі, та медіаною, проведеною до основи.

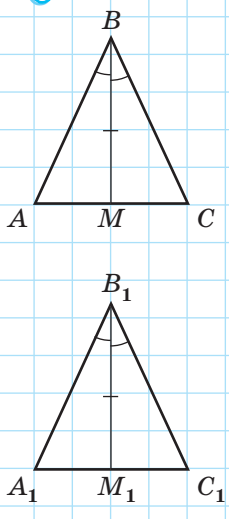


Рис. 102

Розв'язання

Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — дані рівнобедрені трикутники з основами AC і A_1C_1, BM і B_1M_1 — їх медіани, причому $BM = B_1M_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ (рис. 102). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Розглянемо трикутники ABM і $A_1B_1M_1$. У них $BM = B_1M_1$ за умовою. Оскільки за властивістю медіани, бісектриси й висоти рівнобедреного трикутника BM і B_1M_1 є також бісектрисами рівних кутів ABC і $A_1B_1C_1$, то $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$. Крім того, відрізки BM і B_1M_1 — висоти рівнобедрених трикутників, тому $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1 = 90°$. Таким чином, $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ за другою ознакою рівності трикутників, звідки $AB = A_1B_1$, а тоді й $BC = B_1C_1$. Отже, дані трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за першою ознакою рівності трикутників, що й треба було довести.

www.e-ranok.com.ua

12.3*. Додаткові побудови в геометричних задачах. Метод подвоєння медіани[1]

Для розв'язування деяких геометричних задач потрібно проводити додаткові побудови, тобто добудовувати відрізки й кути, не згадані в умові задачі. Це робиться для отримання допоміжних фігур, розгляд яких дозволяє знайти або довести необхідне. Існують певні види додаткових побудов, що їх застосовують найчастіше. Один із них ми розглянемо в наступній задачі.

Задача

Якщо в трикутнику медіана й бісектриса, проведені з однієї вершини, збігаються, то такий трикутник рівнобедрений. Доведіть.

Розв'язання

Нехай BD — медіана й бісектриса даного трикутника ABC (рис. 103). Доведемо, що трикутник ABC є рівнобедреним.

На промені BD від точки D відкладемо відрізок DB_1, що дорівнює BD (тобто подвоїмо медіану BD).

Розглянемо трикутники BDC і B_1DA. У них $AD = CD$ за означенням медіани, $BD = B_1D$ за побудовою, $\angle BDC = \angle B_1DA$ як вертикальні. Таким чином, $\triangle BDC = \triangle B_1DA$ за першою ознакою рівності трикутників. Звідси випливає, що $\angle 3 = \angle 2$ і $AB_1 = CB$. Розглянемо тепер трикутник BAB_1. З огляду на те, що BD — бісектриса кута ABC, маємо $\angle 1 = \angle 2$, тоді $\angle 1 = \angle 3$. За ознакою рівнобедреного трикутника трикутник BAB_1 є рівнобедреним з основою BB_1. Звідси $AB_1 = AB$, а оскільки з доведеного $AB_1 = CB$, то $AB = CB$. Таким чином, трикутник ABC рівнобедрений, що й треба було довести.

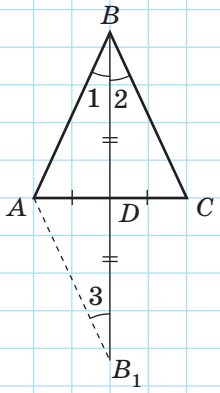


Рис. 103

[1] Тут і далі зірочкою позначено теоретичний матеріал, вивчення якого не є обов'язковим.

www.e-ranok.com.ua

Проаналізуємо розв'язання цієї задачі. Відображення всіх даних умови на рисунку не виявило набору елементів, які дозволяють відразу розпочати доведення. Це зумовило необхідність додаткової побудови, завдяки якій утворився допоміжний трикутник B_1DA. Довівши його рівність із трикутником BDC, ми дістали додаткові рівності відрізків та кутів і розв'язали задачу.

Додаткова побудова полягала в подвоєнні відрізка BD. Така побудова використовується найчастіше саме для медіан трикутників, тому метод доведення, що ґрунтується на ній, називають ***методом подвоєння медіани***.

Запитання й задачі

Усні вправи

302. У трикутнику DEF проведено відрізок EA (рис. 104). Визначте, чи є цей відрізок медіаною, бісектрисою або висотою даного трикутника, якщо:

а) $DA = AF$;
б) $\angle DAE = \angle FAE$;
в) $\angle DEA = \angle FEA$;
г) $DE = EF$ і $DA = AF$.

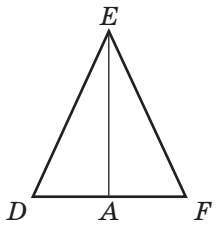


Рис. 104

303. Чи може лежати всередині трикутника тільки одна з трьох його висот; тільки дві з трьох його висот?

304. Чи може медіана трикутника збігатися з його висотою, але не збігатися з бісектрисою, проведеною з тієї самої вершини?

305. У трикутнику ABC відрізок AD — медіана, бісектриса й висота. Назвіть рівні сторони трикутника.

306. У трикутнику ABC $\angle A = \angle C$. Бісектриса якого з кутів трикутника збігається з медіаною та висотою?

307. У рівнобедреному, але не рівносторонньому трикутнику проведено всі медіани, бісектриси й висоти. Скільки різних відрізків проведено? Як зміниться відповідь, якщо даний трикутник є рівностороннім?

www.e-ranok.com.ua

Графічні вправи

308. Накресліть нерівнобедрений трикутник ABC.

а) Позначте точку M — середину сторони BC. Проведіть відрізок AM. Як він називається?

б) Проведіть бісектрису кута B і позначте точку L її перетину зі стороною AC. Як називається відрізок BL?

в) Проведіть із точки C перпендикуляр CH до прямої AB. Як називається побудований відрізок у трикутнику ABC?

309. Накресліть рівнобедрений трикутник ABC з основою AC і тупим кутом B.

а) Проведіть висоту AD. Чи лежить точка D на відрізку BC?

б) Проведіть медіану BM. Чи є рівними кути ABM і CBM? Чому?

Письмові вправи

Рівень А

310. У рівнобедреному трикутнику ABC відрізок BD — медіана, проведена до основи. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $P_{\triangle ABD} = 12$ см, $BD = 4$ см.

311. У рівнобедреному трикутнику ABC відрізок BD — медіана, проведена до основи. Знайдіть периметр трикутника BDC, якщо $P_{\triangle ABC} = 18$ см, $BD = 5$ см.

312. У трикутнику ABC $\angle A = \angle C$, BD — бісектриса трикутника. Доведіть, що $AD = CD$.

313. У трикутнику ABC відрізок CD є медіаною й висотою. Доведіть, що $\angle A = \angle B$.

314. На висоті MP рівнобедреного трикутника KMN з основою KN позначено точку O (рис. 105). Доведіть, що трикутник KON рівнобедрений.

315. У рівнобедреному трикутнику KON з основою KN на продовженні бісектриси OP позначено точку M (рис. 105). Доведіть, що трикутник KMN рівнобедрений.

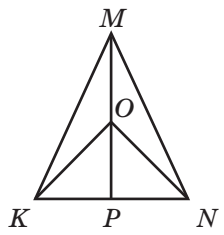


Рис. 105

www.e-ranok.com.ua

316. Доведіть, що медіани рівних трикутників, проведені до відповідно рівних сторін, рівні.

317. Доведіть, що бісектриси рівних трикутників, проведені з вершин відповідно рівних кутів, рівні.

Рівень Б

318. У рівнобедреному трикутнику ABC відрізок BD — бісектриса, проведена до основи. Знайдіть її довжину, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 28 см, а периметр трикутника ABD дорівнює 20 см.

319. Доведіть, що трикутник, у якому медіана ділить периметр навпіл, рівнобедрений.

320. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, рівні.

321. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені з вершин при основі, рівні.

322. Трикутники ABC і DBC рівні (рис. 106). Доведіть, що точка перетину відрізків AD і BC ділить відрізок AD навпіл.

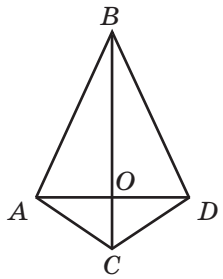


Рис. 106

323. Перпендикулярні відрізки AD і BC перетинаються в точці O, причому $\angle ABC = \angle DBC$ (рис. 106). Доведіть, що трикутник ACD рівнобедрений.

324. Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за основою та проведеною до неї медіаною.

325. Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за кутом, протилежним основі, та висотою, проведеною з вершини цього кута.

Рівень В

326. Доведіть рівність трикутників за стороною, прилеглим кутом і бісектрисою, проведеною з вершини цього кута.

327. Доведіть рівність трикутників за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, та кутом між ними.

328. Доведіть рівність трикутників за медіаною та двома кутами, на які вона ділить кут трикутника.

www.e-ranok.com.ua

329. Доведіть рівність трикутників за кутом, бісектрисою, проведеною з вершини цього кута, і кутом, який вона утворює з протилежною стороною.

Повторення перед вивченням § 13

Теоретичний матеріал

- рівність трикутників
- рівнобедрений трикутник

п. 7.2; § 11

Задачі

330. Дано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Яку з чотирьох даних умов можна виключити, щоб решти умов вистачило для доведення рівності трикутників за першою ознакою; за другою ознакою?

331. Трикутники ABC і AB_1C мають спільну сторону AC, причому точки B і B_1 лежать по різні боки від прямої AC, $\angle BAC = \angle B_1AC$. Назвіть додаткову умову, необхідну для доведення рівності трикутників. Наведіть усі можливі відповіді.

www.e-ranok.com.ua

§ 13 Третя ознака рівності трикутників та її застосування

13.1. Третя ознака рівності трикутників

Застосуємо властивості рівнобедреного трикутника для доведення третьої ознаки рівності трикутників.

Теорема (третя ознака рівності трикутників — за трьома сторонами)

Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

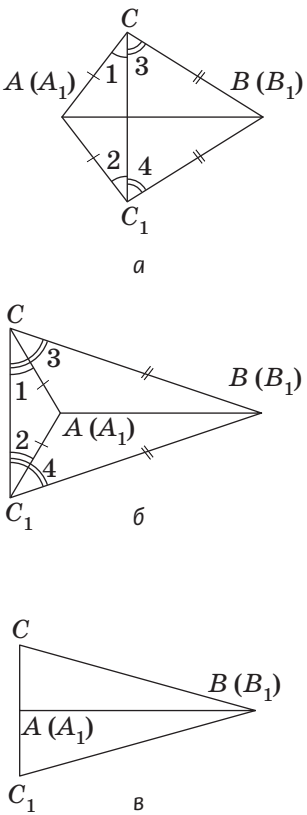


Рис. 107. Прикладання трикутника $A_1B_1C_1$ до трикутника ABC

Доведення

□ Нехай дано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Прикладемо трикутник $A_1B_1C_1$ до трикутника ABC так, щоб вершина A_1 сумістилася з вершиною A, вершина B_1 — з вершиною B, а точки C і C_1 лежали по різні боки від прямої AB. Можливі три випадки:

1) промінь CC_1 проходить усередині кута ACB (рис. 107, *а*);
2) промінь CC_1 проходить поза кутом ACB (рис. 107, *б*);
3) промінь CC_1 збігається з однією зі сторін кута ACB (рис. 107, *в*).

Розглянемо випадки 1 і 2. Оскільки за умовою теореми $AC = A_1C_1$ і $BC = B_1C_1$, то трикутники ACC_1 і BCC_1 рівнобедрені з основою CC_1. За властивістю рівнобедреного трикутника $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Тоді $\angle ACB = \angle AC_1B$ як суми (або різниці) рівних кутів. Таким чином,

www.e-ranok.com.ua

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників. У випадку 3 рівність кутів C і C_1 випливає з властивості рівнобедреного трикутника з основою CC_1, а подальше доведення аналогічне попередньому. Теорему доведено. ■

Узагальнюючи ознаки рівності трикутників, можна побачити, що в усіх трьох ознаках рівність трикутників випливає з рівності трьох пар відповідних елементів. І це не випадково: як правило, трикутник можна задати (побудувати) саме за трьома елементами, але не довільними, а такими, що визначають єдиний трикутник. Наприклад, трикутник можна однозначно задати довжинами трьох його сторін (це випливає зі щойно доведеної третьої ознаки). Однак, наприклад, градусні міри трьох кутів не задають трикутника однозначно. Спробуйте самостійно побудувати відповідний контрприклад — два нерівні трикутники з відповідно рівними кутами.

Задача

Доведіть рівність трикутників за двома сторонами й медіаною, проведеною до однієї з них.

Розв'язання

Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — дані трикутники з медіанами BM і B_1M_1 відповідно, причому $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BM = B_1M_1$ (рис. 108). Розглянемо спочатку трикутники ABM і $A_1B_1M_1$. У них $AB = A_1B_1$ і $BM = B_1M_1$ за умовою, а $AM = A_1M_1$ як половини рівних сторін AC і A_1C_1, тобто $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ за третьою ознакою. Звідси, зокрема, випливає, що $\angle A = \angle A_1$. Тоді $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою ($AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ за умовою, $\angle A = \angle A_1$ за доведеним).

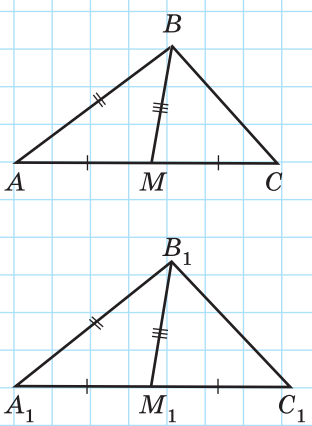


Рис. 108

www.e-ranok.com.ua

13.2*. *Властивості та ознаки*

Проаналізуємо ознаки рівності трикутників. Усі ці твердження однакові за структурою: якщо трикутники мають певну особливість, то вони рівні. Ця особливість (рівність трьох пар відповідних елементів) і становить ***ознаку*** рівності трикутників. Неважко здогадатися за аналогією, що, скажімо, ознака паралельності прямих може мати такий вигляд: «Якщо дві прямі мають певну особливість, то вони паралельні» (пригадайте, чи розглядалися раніше схожі твердження).

У багатьох геометричних твердженнях ми одержуємо нові особливості фігур за допомогою вже відомих: наприклад, якщо два кути є вертикальними, то вони рівні. У такому разі рівність є ***властивістю*** вертикальних кутів. За аналогією, властивість суміжних кутів матиме такий вигляд: «Якщо два кути суміжні, то вони мають певну особливість». Неважко збагнути, яке з вивчених тверджень є властивістю суміжних кутів.

Зазначимо ще один цікавий факт. Якщо нам дано рівнобедрений трикутник, то рівність двох його кутів — властивість рівнобедреного трикутника. Якщо ж із умови рівності двох кутів певного трикутника ми робимо висновок, що цей трикутник рівнобедрений, то рівність цих кутів — ознака рівнобедреного трикутника. Таким чином, одна й та сама особливість фігури залежно від умови задачі може розглядатись або як властивість, або як ознака.



Наведемо приклади властивостей і ознак, не пов'язані з геометрією. Наявність довгої шиї є властивістю жирафи (якщо тварина — жирафа, то вона має довгу шию). Але довгу шию мають також і страуси, тобто не будь-яка тварина з довгою шиєю — жирафа. Таким чином, наявність довгої шиї не є ознакою жирафи. Інший приклад: підвищення температури — ознака хвороби (бо якщо в людини висока температура, то людина хвора), але підвищення температури не є властивістю хвороби (адже багато хвороб не супроводжуються підвищенням температури). І нарешті, приклад з арифметики: остання цифра 0 — і властивість, і ознака чисел, які діляться на 10.

Спробуйте навести власні приклади властивостей і ознак, що вивчаються в школі.

www.e-ranok.com.ua

Запитання й задачі

Усні вправи

332. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$ і $BC = B_1C_1$. Яку рівність необхідно додати до умови, щоб рівність даних трикутників можна було довести за третьою ознакою?

333. Три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам другого трикутника. Чи є рівними кути між відповідно рівними сторонами цих трикутників? Чому?

334. Чи правильно, що два рівносторонні трикутники рівні, якщо вони мають однакові периметри?

335. Чи правильно, що два довільні трикутники рівні, якщо вони мають однакові периметри? Чи справджується обернене твердження?

Графічні вправи

336. Накресліть рівнобедрені трикутники ABC і ADC зі спільною основою AC.

а) Сполучіть точки B і D. Виділіть кольором трикутники, рівність яких можна довести за третьою ознакою.

б) Назвіть кути, бісектриси яких лежать на прямій BD.

337. Накресліть рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$.

а) Проведіть медіани BM і B_1M_1.

б) Виділіть кольором пари рівних трикутників, що утворилися на рисунку. Чи можна довести їх рівність за першою ознакою; за другою ознакою; за третьою ознакою?

Письмові вправи

Рівень А

338. На рис. 109 $AB = CD$, $BC = AD$. Доведіть рівність трикутників ABD і CDB.

339. На рис. 110 $AB = CB$, $AD = CD$. Доведіть рівність трикутників ABD і CDB.

www.e-ranok.com.ua

340. Якщо основа й бічна сторона одного рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють основі й бічній стороні другого рівнобедреного трикутника, то такі трикутники рівні. Доведіть.

341. Якщо дві сторони та периметр одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам та периметру другого трикутника, то такі трикутники рівні. Доведіть.

342. На рис. 111 $\triangle ABC = \triangle CDA$. Доведіть, що $\triangle ABD = \triangle CDB$.

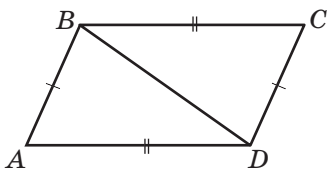


Рис. 109

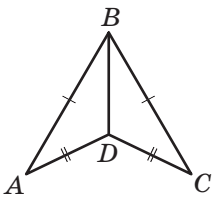


Рис. 110

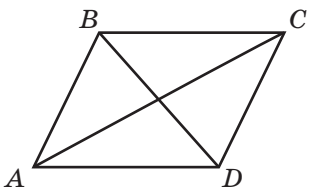


Рис. 111

Рівень Б

343. Рівнобедрені трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC і лежать по один бік від прямої AC. Доведіть, що $\angle ADB = \angle CDB$.

344. На рис. 112 $AB = CD$, $AC = BD$. Доведіть рівність трикутників ABD і DCA.

345. На рис. 113 $AB = CD$, $BF = CE$, $AE = FD$. Доведіть, що трикутник EOF рівнобедрений.

346. На рис. 112 $\triangle AOB = \triangle DOC$. Доведіть рівність трикутників ABC і DCB. За допомогою яких ознак рівності трикутників її можна обґрунтувати?

347. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, яка є серединою кожного з них. Доведіть рівність трикутників ABC і BAD.

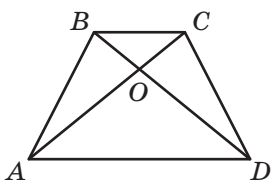


Рис. 112

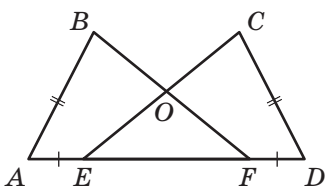


Рис. 113

www.e-ranok.com.ua

Рівень В

348. Точки A, B, C і D лежать на одній прямій, причому $AE_1 = AE_2$, $BE_1 = BE_2$ (рис. 114). Доведіть, що трикутники CDE_1 і CDE_2 рівні.

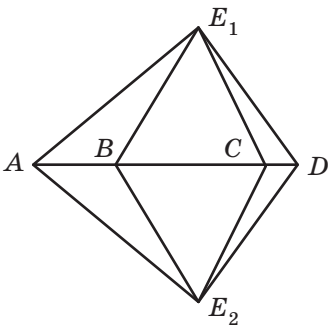


Рис. 114

349. Точки A, B, C і D лежать на одній прямій, причому $AE_1 = AE_2$, $CE_1 = CE_2$ (рис. 114). Доведіть, що трикутники BDE_1 і BDE_2 рівні.

350. Доведіть рівність трикутників за двома сторонами й медіаною, проведеними з однієї вершини.

351. Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за бічною стороною та проведеною до неї медіаною.

Онлайн-тренування для підготовки до контрольної роботи № 2

Задачі для підготовки до контрольної роботи № 2

1. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 105 см, а бічна сторона відноситься до основи як 7 : 3. Знайдіть сторони трикутника.

2. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, причому $AO = DO$, $CO = BO$ (рис. 115).

а) Доведіть рівність трикутників AOC і DOB.

б) Знайдіть периметр трикутника AOC, якщо $AC = 4$ см, $CD = 8$ см.

3. З кінців відрізка AB, який перетинає пряму a в точці O, проведено до цієї прямої перпендикуляри AC і BD, причому $CO = DO$ (рис. 116). Доведіть, що точки A і B розміщені на однаковій відстані від прямої a.

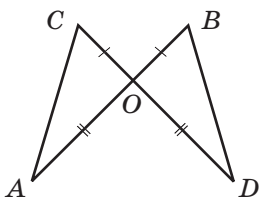


Рис. 115

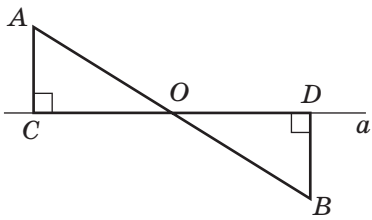


Рис. 116

www.e-ranok.com.ua

4. Трикутник AOB рівнобедрений з основою AB, $AC = BD$ (рис. 117). Доведіть, що трикутник COD також рівнобедрений.

5. Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за основою та периметром.

6. У трикутнику ABC висота BH ділить сторону AC навпіл. Бісектриса трикутника AD дорівнює 15 см. Знайдіть довжину бісектриси CE цього трикутника.

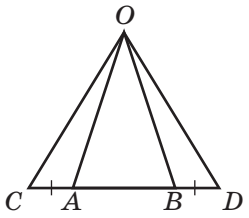


Рис. 117

Повторення перед вивченням § 14

Теоретичний матеріал

- теорема про дві прямі, перпендикулярні до третьої
- паралельні прямі

п. 6.3; § 4

Задачі

352. Визначте, які з наведених тверджень правильні:

а) дві прямі, перпендикулярні до третьої, перпендикулярні;

б) дві прямі, паралельні третій, паралельні;

в) через будь-яку точку площини можна провести пряму, паралельну даній;

г) через будь-яку точку площини можна провести не більш ніж одну пряму, паралельну даній.

353. Через точку C, яка не належить жодній із прямих a і b, проведено пряму c. Визначте взаємне розміщення прямих b і c, якщо:

а) $a \parallel b$, $c \parallel a$;

б) $a \perp b$, $c \perp a$.

Чи зміняться відповіді, якщо точка C лежить на прямій b?

www.e-ranok.com.ua

§ 14 Кути, утворені при перетині двох прямих січною. Ознаки паралельності прямих

14.1. Кути, утворені при перетині двох прямих січною

Нехай пряма c перетинає прямі a і b у двох різних точках (рис. 118). У такому разі кажуть, що пряма c є **січною** прямих a і b. У результаті такого перетину двох прямих третьою утворюються пари нерозгорнутих кутів, які мають спеціальні назви:

- **внутрішні різносторонні кути** лежать між прямими a і b по різні боки від січної: 3 і 6, 4 і 5;
- **внутрішні односторонні кути** лежать між прямими a і b по один бік від січної: 3 і 5, 4 і 6;
- **відповідні кути** лежать по один бік від січної, причому сторона одного з них є частиною сторони другого: 1 і 5, 3 і 7, 2 і 6, 4 і 8.

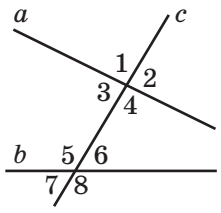


Рис. 118. Пряма c перетинає прямі a і b

14.2. Ознаки паралельності прямих

Ви вже вивчили дві теореми, які стверджують, що дві прямі паралельні:

1) якщо дві прямі паралельні третій, то вони паралельні;

2) якщо дві прямі перпендикулярні до третьої, то вони паралельні.

Доведемо ще кілька ознак паралельності прямих.

Теорема (ознака паралельності двох прямих, які перетинаються січною)

Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні.

www.e-ranok.com.ua

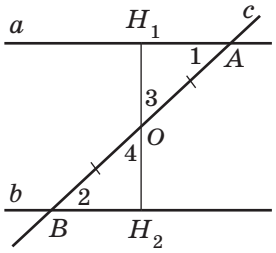


Рис. 119. $\angle 1 = \angle 2$, тоді $a \parallel b$

Доведення

□ Нехай пряма c перетинає прямі a і b у точках A і B відповідно, причому $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 119). Доведемо, що $a \parallel b$.

Якщо кути 1 і 2 прямі, то $a \perp c$ і $b \perp c$. Тоді $a \parallel b$ за теоремою про дві прямі, перпендикулярні до третьої.

Розглянемо випадок, коли кути 1 і 2 не прямі. Проведемо з точки O — середини відрізка AB — перпендикуляр OH_1 до прямої a. Нехай H_2 — точка перетину прямих OH_1 і b.

Розглянемо трикутники OAH_1 і OBH_2. У них $\angle 1 = \angle 2$ за умовою, $\angle 3 = \angle 4$ як вертикальні і $AO = BO$ за побудовою. Отже, $\triangle OAH_1 = \triangle OBH_2$ за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle OH_1A = \angle OH_2B = 90°$, тобто пряма H_1H_2 перпендикулярна до прямих a і b. Тоді $a \parallel b$ за теоремою про дві прямі, перпендикулярні до третьої. Теорему доведено. ■

Для доведення паралельності прямих можна використовувати не лише внутрішні різносторонні кути, але й інші пари кутів.

Наслідок 1

Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.

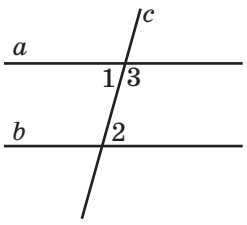


Рис. 120. $\angle 2 + \angle 3 = 180°$, тоді $a \parallel b$

Справді, якщо $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ (рис. 120) і за теоремою про суміжні кути $\angle 1 + \angle 3 = 180°$, то $\angle 1 = \angle 2 = 180° - \angle 3$. Тоді за доведеною теоремою $a \parallel b$.

Наслідок 2

Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.

www.e-ranok.com.ua

Справді, якщо $\angle 1 = \angle 3$ (рис. 121), а $\angle 2 = \angle 3$ як вертикальні, то $\angle 1 = \angle 2$. Тоді за доведеною теоремою $a \parallel b$.

Наслідки 1 і 2 можна об'єднати з доведеною теоремою в одне твердження про ознаки паралельності прямих.

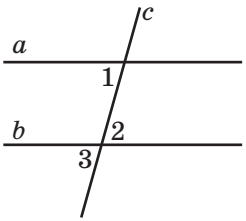


Рис. 121. $\angle 1 = \angle 3$, тоді $a \parallel b$

Якщо при перетині двох прямих січною виконується принаймні одна з умов:

1) ***внутрішні різносторонні кути рівні;***
2) ***сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює*** 180°;
3) ***відповідні кути рівні,***

то дані прямі паралельні.

Якщо виконується одна з трьох наведених умов, то виконуються й дві інші (доведіть це самостійно).

Задача

На рис. 122 $AB = BC$, AC — бісектриса кута BAD. Доведіть, що $BC \parallel AD$.

Розв'язання

За умовою задачі трикутник ABC рівнобедрений з основою AC. За властивістю кутів рівнобедреного трикутника $\angle 1 = \angle 3$. Разом із тим $\angle 1 = \angle 2$, оскільки AC — бісектриса кута BAD. Звідси $\angle 2 = \angle 3$. Кути 2 і 3 є внутрішніми різносторонніми при прямих AD і BC та січній AC. Оскільки ці кути рівні, то за ознакою паралельності прямих $AD \parallel BC$, що й треба було довести.

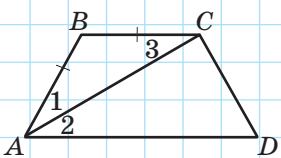


Рис. 122

www.e-ranok.com.ua

14.3. Про існування прямої, паралельної даній

Доведені ознаки паралельності прямих дозволяють детальніше проаналізувати формулювання аксіоми паралельних прямих (аксіоми Евкліда, п. 4.1). У цій аксіомі стверджувалося про єдиність прямої, яка проходить через дану точку і є паралельною даній прямій, але не стверджувалося про її існування.

На підставі ознаки паралельності прямих факт існування такої прямої можна довести.

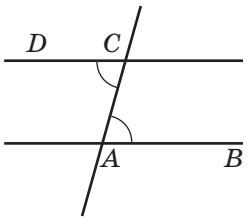


Рис. 123. Пряма CD проходить через точку C і паралельна прямій AB

Нехай дано пряму AB і точку C, яка не належить цій прямій (рис. 123). Проведемо пряму AC. Від променя CA відкладемо кут ACD, що дорівнює куту CAB, так, як показано на рисунку. Тоді кути ACD і CAB є внутрішніми різносторонніми при прямих AB і CD та січній AC. За доведеною ознакою $AB \parallel CD$, тобто існує пряма, що проходить через точку C паралельно прямій AB.

Таким чином, ми можемо об'єднати доведений факт із аксіомою паралельних прямих у такій теоремі.

Теорема (про існування і єдиність прямої, паралельної даній)

Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній прямій, і тільки одну.

Узагалі, аксіома Евкліда й пов'язані з нею твердження були предметом особливої уваги вчених протягом багатьох століть. На початку позаминулого сторіччя видатний російський математик Микола Іванович Лобачевський створив неевклідову геометрію, у якій аксіома паралельних прямих не справджується.

www.e-ranok.com.ua

Запитання й задачі

Усні вправи

354. На рис. 124 вкажіть кут, який разом із кутом 4 становить:

а) пару внутрішніх різносторонніх кутів;

б) пару внутрішніх односторонніх кутів;

в) пару відповідних кутів.

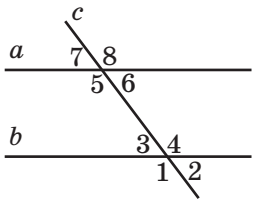


Рис. 124

355. За рис. 124 визначте, чи будуть прямі a і b паралельними, якщо:

а) $\angle 3 = \angle 6$; б) $\angle 5 = \angle 8$;

в) $\angle 1 = \angle 7$; г) $\angle 2 = \angle 6$;

д) $\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$; е) $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$.

356. За рис. 124 визначте, за яких значень n буде правильним твердження:

а) якщо $\angle 6 = \angle n$, то $a \parallel b$;

б) якщо $\angle 6 + \angle n = 180^\circ$, то $a \parallel b$.

357. Визначте, які з наведених тверджень є правильними:

а) якщо в результаті перетину двох прямих січною утворюються вісім рівних кутів, то прямі паралельні;

б) якщо в результаті перетину двох прямих січною утворюються чотири рівні кути, то прямі паралельні;

в) сума двох кутів трикутника може дорівнювати 180°.

Графічні вправи

358. Накресліть прямі a і b та проведіть січну c.

а) Виділіть на рисунку одну пару внутрішніх різносторонніх кутів червоним кольором, а другу пару — синім.

б) Виділіть кути, відповідні до «червоних» кутів, червоним кольором, а кути, відповідні до «синіх» кутів, — синім кольором.

359. Накресліть кут ABC, що дорівнює 60°.

а) Від променя AB відкладіть кут DAB, який дорівнює 120°, так, щоб точки C і D лежали по один бік від прямої AB.

б) Чи паралельні прямі AD і BC? Чому?

www.e-ranok.com.ua

Письмові вправи

Рівень А

360. Дано трикутник ABC. Пряма l перетинає сторону AB у точці D, а сторону BC — у точці E. Назвіть внутрішні різносторонні, внутрішні односторонні й відповідні кути при прямих AB і BC та січній DE.

361. За даними рис. 125, *а–в* доведіть, що $a \parallel b$.

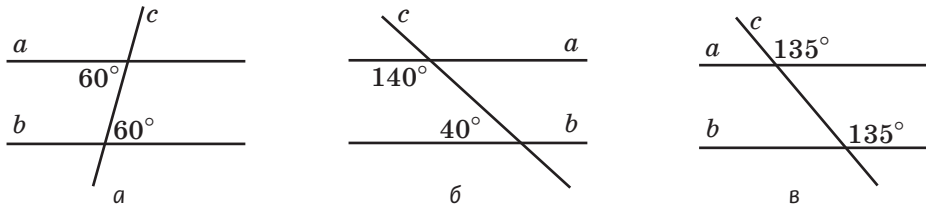


Рис. 125

362. За рис. 124 визначте, чи паралельні прямі a і b, якщо:
а) $\angle 4 = 125°$, $\angle 5 = 125°$;
б) $\angle 5 = 115°$, $\angle 3 = 65°$;
в) $\angle 3 = 65°$, $\angle 7 = 65°$.

363. На рис. 126 $\triangle ABD = \triangle CDB$. Доведіть, що $AD \parallel BC$.

364. На рис. 127 $\triangle AOB = \triangle COD$. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

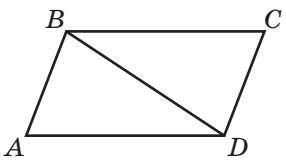


Рис. 126

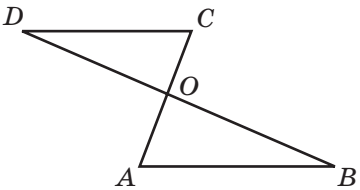


Рис. 127

Рівень Б

365. Прямі a і b перетинають пряму c під рівними кутами. Чи обов'язково $a \parallel b$?

366. За даними рис. 128, *а–в* доведіть, що $a \parallel b$.

367. За рис. 124 визначте, чи паралельні прямі a і b, якщо:
а) $\angle 5 = 135°$, а $\angle 4$ втричі більший, ніж $\angle 3$;
б) $\angle 2 = 72°$, а $\angle 6 : \angle 8 = 2 : 3$.

www.e-ranok.com.ua

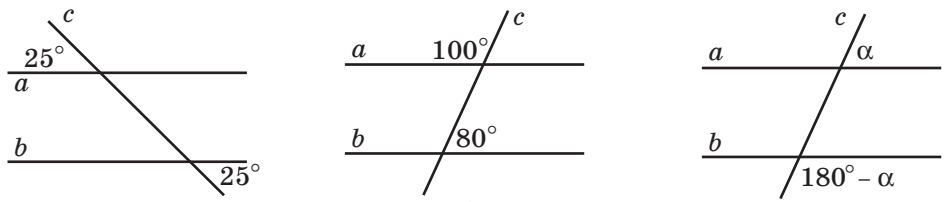


Рис. 128

368. Відрізки AB і CD перетинаються в точці, яка є їхньою спільною серединою. Доведіть, що $AC \parallel BD$.

369. На рис. 129 $AB = BC$, $CD = DE$. Доведіть, що прямі AB і DE паралельні.

370. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle CDA$. Назвіть паралельні сторони цих трикутників і доведіть їхню паралельність.

371. У трикутнику ABC проведено бісектрису BL. На стороні BC позначено точку K так, що $BK = KL$. Доведіть паралельність прямих AB і KL.

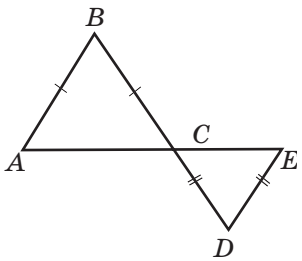


Рис. 129

372. У трикутнику ABC $AB = BC$, $\angle C = 80°$. Пряма l перетинає сторони AB і BC у точках D і E відповідно, причому $AD = DE$ і $\angle EAC = 40°$. Доведіть, що $l \parallel AC$.

Рівень В

373. На рис. 130 $AD = CF$, $BC = DE$, $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $AB \parallel EF$.

374. На рис. 131 $AB = DE$, $BC = EF$, $AD = CF$. Доведіть, що $BC \parallel EF$.

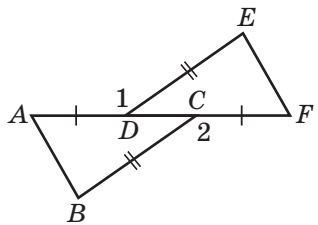


Рис. 130

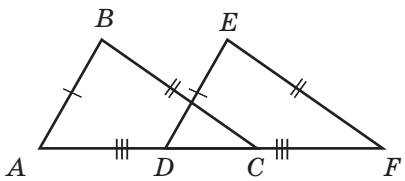


Рис. 131

www.e-ranok.com.ua

375. У трикутнику ABC $\angle A = 20°$, $\angle B = 80°$. Із точки B проведено промінь BD так, що BC — бісектриса кута ABD. Доведіть, що прямі AC і BD паралельні.

376. У трикутнику ABC $\angle A = 70°$, $\angle B = 40°$. На промені CB позначено точку D, яка не належить відрізку BC. Промінь BE — бісектриса кута ABD. Доведіть, що прямі AC і BE паралельні.

Повторення перед вивченням § 15

Теоретичний матеріал

- паралельні прямі
- означення перпендикуляра; відстань від точки до прямої
- суміжні кути
- вертикальні кути

§ 4:, п. 9.2

§ 5; 6

Задачі

377. У трикутнику побудовано всі медіани, всі бісектриси і всі висоти. Яку найменшу кількість відрізків побудовано всередині трикутника? Яку найбільшу кількість відрізків побудовано поза трикутником?

378. Пряма, яка паралельна стороні AB трикутника ABC і перетинає сторону BC, перетинає також і сторону AC. Доведіть.

www.e-ranok.com.ua

§ 15 Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною

15.1. Теорема про властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною

У попередньому параграфі було встановлено співвідношення кутів між двома прямими й січною, які гарантують паралельність даних прямих. Але чи обов'язково ці співвідношення зберігаються для будь-якої пари паралельних прямих, що перетинаються січною? Доведемо твердження, обернене до ознаки паралельності прямих.

Теорема (властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною)

Якщо січна перетинає дві паралельні прямі, то:
1) внутрішні різносторонні кути рівні;
2) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°;
3) відповідні кути рівні.

Доведення

□ Доведемо перше з тверджень теореми.

Нехай січна c перетинає паралельні прямі a і b у точках A і B відповідно (рис. 132). Доведемо методом від супротивного, що внутрішні різносторонні кути при цих прямих рівні.

Нехай ці кути не рівні. Проведемо через точку A пряму a_1 так, щоб внутрішні різносторонні кути при прямих a_1 і b та січній c були рівними. Тоді за ознакою паралельності прямих маємо $a_1 \parallel b$. Але $a \parallel b$ за умовою теореми,

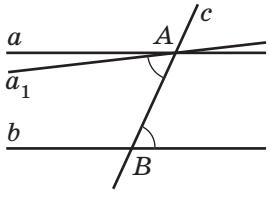


Рис. 132. До припущення про те, що внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих a і b не рівні

www.e-ranok.com.ua

а за аксіомою паралельних прямих через точку A можна провести лише одну пряму, паралельну b. Таким чином, ми отримали суперечність. Отже, наше припущення хибне, тобто внутрішні різносторонні кути рівні. ■

З доведеного твердження неважко отримати два інших твердження теореми (зробіть це самостійно).

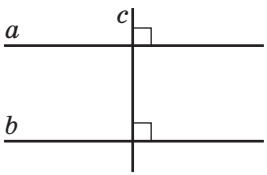


Рис. 133. $a \parallel b$, $c \perp a$, тоді $c \perp b$

Наслідок

Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої прямої.

Цей наслідок обґрунтуйте самостійно за рис. 133.

Задача

Сума двох внутрішніх кутів, що утворилися в результаті перетину двох паралельних прямих січною, дорівнює 210°. Знайдіть усі утворені кути.

Розв'язання

Нехай $a \parallel b$, c — січна. Внутрішні кути, про які йдеться в умові, можуть бути односторонніми, різносторонніми або суміжними. Оскільки при перетині паралельних прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° і сума суміжних кутів також дорівнює 180°, то дані кути — внутрішні різносторонні. Нехай $\angle 4 + \angle 5 = 210°$ (рис. 134). Оскільки $a \parallel b$, то $\angle 4 = \angle 5 = 210° : 2 = 105°$. Тоді:

$\angle 1 = 105°$, оскільки кути 1 і 5 відповідні;

$\angle 3 = 180° - 105° = 75°$, оскільки кути 3 і 5 внутрішні односторонні;

$\angle 2 = 75°$, оскільки кути 2 і 3 вертикальні;

$\angle 6 = 75°$, оскільки кути 5 і 6 суміжні;

$\angle 7 = 75°$, оскільки кути 7 і 3 відповідні;

$\angle 8 = 105°$, оскільки кути 8 і 4 відповідні.

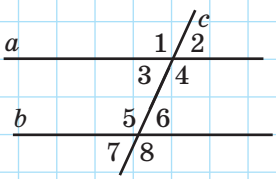


Рис. 134

www.e-ranok.com.ua

15.2. Відстань між паралельними прямими

Як відомо, відстань від точки до прямої — це довжина перпендикуляра, проведеного з цієї точки до прямої. Можна припустити, що відстань між паралельними прямими теж буде визначатися за допомогою перпендикуляра. Але перш ніж сформулювати означення, доведемо ще одну властивість паралельних прямих.

Теорема (про відстані від точок прямої до паралельної прямої)

Відстані від будь-яких двох точок прямої до паралельної їй прямої рівні.

Доведення

□ Нехай a і b — дані паралельні прямі, A_1B_1 і A_2B_2 — відстані від точок A_1 і A_2 прямої a до прямої b (рис. 135). Доведемо, що $A_1B_1 = A_2B_2$.

Оскільки за означенням відстані від точки до прямої $A_1B_1 \perp b$ і $A_2B_2 \perp b$, то за теоремою про дві прямі, перпендикулярні до третьої, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

Розглянемо трикутники $A_1B_1A_2$ і $B_2A_2B_1$. У них сторона B_1A_2 спільна, $\angle 1 = \angle 2$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих a і b та січній B_1A_2, $\angle 3 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих A_1B_1 і A_2B_2 та січній B_1A_2. Таким чином, $\triangle A_1B_1A_2 = \triangle B_2A_2B_1$ за другою ознакою рівності трикутників, звідки $A_1B_1 = A_2B_2$. Теорему доведено. ■

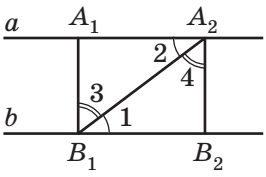


Рис. 135. $a \parallel b$, точки A_1 і A_2 рівновіддалені від прямої b

Зі щойно доведеної теореми випливає, що відстань від точки прямої a до прямої b не залежить від вибору точки, тобто є однаковою для всіх точок прямої a. Це дозволяє сформулювати означення.

www.e-ranok.com.ua

Означення

Відстанню між паралельними прямими називається відстань від будь-якої точки однієї з цих прямих до другої прямої.

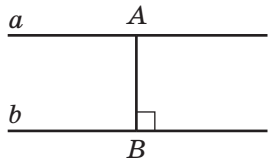


Рис. 136. Перпендикуляр AB — відстань між прямими a і b

Таким чином, відстань між паралельними прямими — довжина перпендикуляра, проведеного з довільної точки однієї прямої до другої прямої.

На рис. 136 $a \parallel b$, $AB \perp b$, тобто AB — відстань між прямими a і b. Зауважимо, що за наслідком теореми про властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, $AB \perp a$, тобто AB — **спільний перпендикуляр** до прямих a і b.

Запитання й задачі

Усні вправи

379. Чи обов'язково серед кутів, які утворились у результаті перетину двох паралельних прямих січною, знайдуться:

а) рівно чотири гострі кути;
б) не більш ніж чотири гострі кути;
в) не менш ніж чотири тупі кути;
г) не менш ніж чотири рівні кути?

380. У результаті перетину двох паралельних прямих січною утворилися два кути з градусними мірами $80°$. Чи можуть ці кути бути:

а) внутрішніми різносторонніми;
б) внутрішніми односторонніми;
в) відповідними?

381. Один із кутів, утворених у результаті перетину двох паралельних прямих січною, дорівнює $120°$. Чи може один із решти семи кутів дорівнювати $50°$? Чому?

382. Внутрішні односторонні кути, утворені в результаті перетину двох паралельних прямих січною, рівні. Під яким кутом січна перетинає дані прямі?

www.e-ranok.com.ua

383. Відрізок AB — відстань між паралельними прямими a і b. Під яким кутом січна AB перетинає прямі a і b?

Графічні вправи

384. Накресліть паралельні прямі a і b та січну c, не перпендикулярну до них.

а) Зафарбуйте вісім утворених кутів червоним або синім кольорами так, щоб сума будь-яких двох кутів різних кольорів дорівнювала $180°$.

б) З точки перетину прямих a і c проведіть відрізок, що є відстанню між паралельними прямими a і b. Під яким кутом цей відрізок перетинає пряму b?

385. Накресліть трикутник ABC.

а) Проведіть пряму, яка паралельна стороні AC і перетинає сторони AB і BC у точках D і E відповідно.

б) Позначте червоним кольором кут трикутника ABC, який дорівнює куту BDE.

в) Позначте синім кольором кут трикутника ABC, сума якого з кутом DEC дорівнює $180°$.

Письмові вправи

Рівень А

386. За даними рис. 137 знайдіть кути 1 і 2, якщо $a \parallel b$.

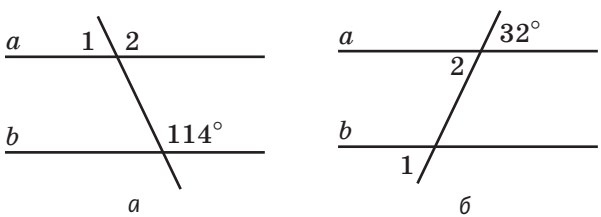


Рис. 137

387. Один із кутів, утворених у результаті перетину двох паралельних прямих січною, дорівнює $18°$. Знайдіть решту кутів.

www.e-ranok.com.ua

388. Кут ABC дорівнює $62°$, а кут BCD дорівнює $118°$. Чи можуть прямі AB і CD:

а) бути паралельними; б) перетинатися?

Відповіді обґрунтуйте.

389. Кут ABC дорівнює $29°$, а кут BAD дорівнює $141°$. Чи можуть прямі AD і BC бути паралельними? Відповідь обґрунтуйте.

390. На площині проведено прямі a, b і c, причому $a \parallel b$, $a \perp c$. Визначте взаємне розміщення прямих b і c.

391. Прямі a і b паралельні. Точки A_1 і A_2 лежать на прямій a, відрізки A_1B_1 і A_2B_2 — відстані між прямими a і b. Назвіть відрізки, які є відстанями між прямими A_1B_1 і A_2B_2. Відповідь обґрунтуйте.

Рівень Б

392. За даними рис. 138 знайдіть кут x.

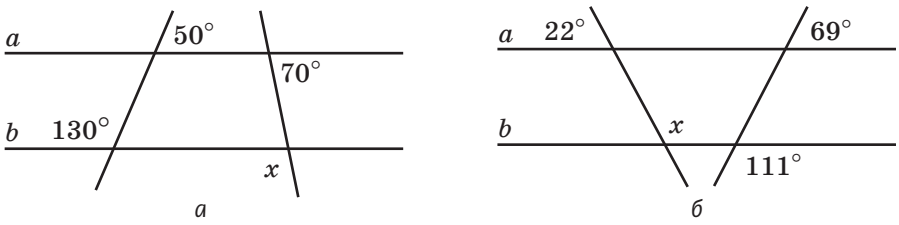


Рис. 138

393. Знайдіть усі кути, утворені в результаті перетину двох паралельних прямих січною, якщо:

а) один із внутрішніх односторонніх кутів на $30°$ більший, ніж другий;

б) сума двох відповідних кутів дорівнює $56°$.

394. За даними рис. 137, *а* визначте, чи паралельні прямі a і b, якщо $\angle 2 - \angle 1 = 54°$.

395. Кут ABC дорівнює $72°$. Із точок A і C усередині кута проведено промені, які паралельні сторонам кута й перетинаються в точці D. Знайдіть кут ADC.

396. Дано кут ABC (рис. 139). Через точку A проведено пряму, яка паралельна стороні BC і перетинає бісектрису даного кута в точці D. Доведіть, що трикутник ABD рівнобедрений.

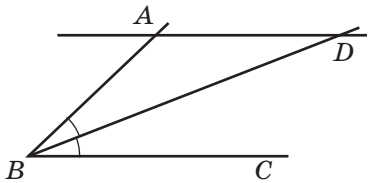


Рис. 139

www.e-ranok.com.ua

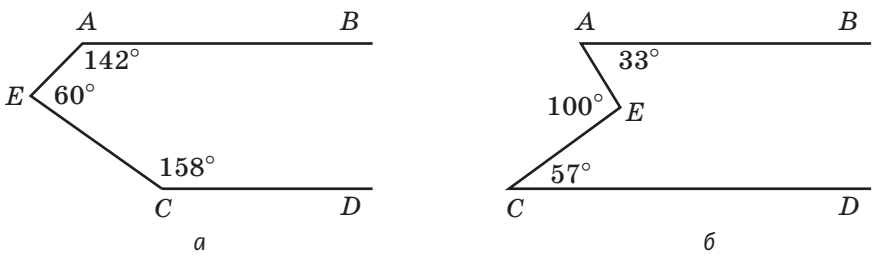
397. Дано рівнобедрений трикутник ABC з основою AC. Пряма, паралельна AC, перетинає сторону AB у точці A_1, а сторону BC — у точці C_1. Доведіть, що трикутник A_1BC_1 рівнобедрений.

398. Відрізок AB — відстань між паралельними прямими a і b. Точка M — середина відрізка AB. Доведіть, що будь-який відрізок із кінцями на даних прямих, який проходить через точку M, ділиться нею навпіл.

399. Через вершину B рівнобедреного трикутника ABC проведено пряму l, паралельну основі AC. Відрізок BK — медіана трикутника ABC. Доведіть, що BK — відстань між прямими l і AC.

Рівень В

400. За даними рис. 140, *а*, *б* визначте, чи паралельні прямі AB і CD.



а *б*

Рис. 140

401. Знайдіть усі кути, які утворились у результаті перетину двох паралельних прямих січною, якщо:

а) п'ять із них не гострі;

б) сума двох внутрішніх різносторонніх кутів у п'ять разів менша, ніж сума двох інших внутрішніх кутів;

в) сума шести з них дорівнює $620°$.

402. Бісектриси внутрішніх односторонніх кутів, утворених у результаті перетину двох паралельних прямих січною, взаємно перпендикулярні. Доведіть.

403. Бісектриси внутрішніх різносторонніх кутів, утворених у результаті перетину двох паралельних прямих січною, паралельні. Доведіть.

www.e-ranok.com.ua

Повторення перед вивченням § 16

Теоретичний матеріал

- суміжні кути
- рівнобедрений і рівносторонній трикутники

§ 5; 11

Задачі

404. Пряма l проходить через вершину B гострокутного трикутника ABC паралельно стороні AC. Доведіть, що пряма l утворює з прямими AB і CB кути, які дорівнюють двом кутам трикутника.

405. У трикутнику ABC $AB + BC = BC + AC = AB + AC$. Доведіть, що $\angle A = \angle B = \angle C$.

www.e-ranok.com.ua

§ 16 Сума кутів трикутника. Зовнішній кут трикутника

16.1. Теорема про суму кутів трикутника та її наслідки

Теорема (про суму кутів трикутника)

Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Доведення

□ Нехай ABC — довільний трикутник. Доведемо, що $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

Проведемо через вершину B пряму b, паралельну AC (рис. 141). Тоді кути 1 і 4 рівні як внутрішні різносторонні при паралельних прямих b і AC та січній AB. Аналогічно $\angle 3=\angle 5$ як внутрішні різносторонні при тих самих паралельних прямих, але січній BC. Маємо: $\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 4+\angle 2+\angle 5=180^\circ$. Теорему доведено. ■

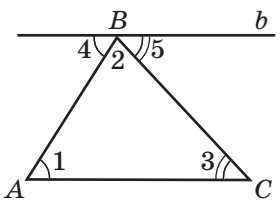


Рис. 141. До доведення теореми про суму кутів трикутника

Наслідок 1

У будь-якому трикутнику принаймні два кути гострі.

Справді, якби трикутник мав два негострі кути (тупі або прямі), то сума всіх кутів перевищувала б 180°, що суперечить доведеній теоремі.

Наслідок 2

Кожний кут рівностороннього трикутника дорівнює 60°.

Оскільки всі кути рівностороннього трикутника рівні, то кожний із них дорівнює $180^\circ:3=60^\circ$.

www.e-ranok.com.ua

Розглянемо ще одне важливе твердження, яке випливає з доведеної теореми.

Задача

Якщо в рівнобедреному трикутнику один із кутів дорівнює 60°, то цей трикутник є рівностороннім. Доведіть.

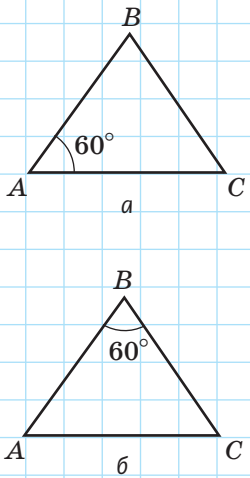


Рис. 142

Розв'язання

Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з основою AC. Розглянемо два випадки.

1) Нехай кут 60° — один із кутів при основі, наприклад $\angle A = 60°$ (рис. 142, *а*). Тоді $\angle C = \angle A = 60°$ як кути при основі рівнобедреного трикутника. Таким чином, $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 60° - 60° = 60°$. Отже, $\angle A = \angle B = \angle C$, тобто ABC — рівносторонній трикутник.

2) Нехай кут 60° — кут, протилежний основі, тобто $\angle B = 60°$ (рис. 142, *б*). Тоді $\angle A = \angle C$ як кути при основі рівнобедреного трикутника. Кожний із цих кутів дорівнює $(180° - 60°) : 2 = 60°$. Знову маємо, що всі кути трикутника ABC є рівними, отже, цей трикутник рівносторонній.

Щойно розв'язана задача є ***опорною***, тобто на неї можна посилатися в ході розв'язування інших задач, коротко переказуючи її зміст. Надалі умови таких задач у підручнику буде виділено напівжирним шрифтом і словом «опорна».

16.2. *Види трикутників за величиною кутів. Класифікація*

Як уже було доведено, будь-який трикутник має не менш ніж два гострі кути. Це означає, що можливі три випадки:

а) усі кути трикутника гострі — **гострокутний** трикутник;

б) два кути трикутника гострі, а третій кут прямий — **прямокутний** трикутник;

в) два кути трикутника гострі, а третій кут тупий — **тупокутний** трикутник.

www.e-ranok.com.ua

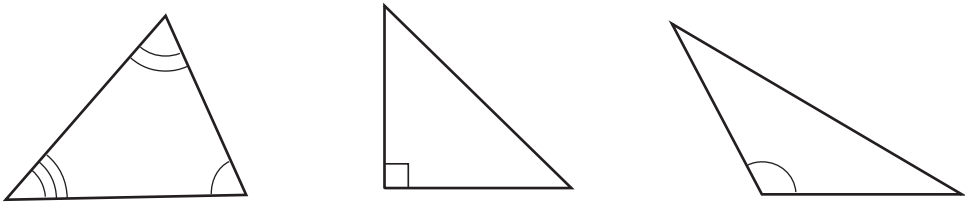
З огляду на це, усі трикутники можна поділити за величиною кутів на три види: гострокутні, прямокутні й тупокутні (рис. 143).

Звернемо увагу на те, що величина кутів — це ознака, за якою будь-який трикутник можна віднести лише до одного з трьох названих видів. Такий поділ об'єктів на окремі види за певною ознакою називають **класифікацією**. Ознака, за якою здійснюється класифікація, є її ***основою***. Так, трикутники можна розділити й за іншою основою — за довжиною сторін — на різносторонні (тобто такі, які не мають рівних сторін), рівнобедрені, але не рівносторонні (в яких тільки дві сторони рівні) і рівносторонні трикутники.



Класифікація вважається правильною, якщо кожний об'єкт можна віднести тільки до одного з названих класів. Так, неправильно поділяти прямі на площині за взаємним розміщенням на паралельні, ті, що перетинаються, і перпендикулярні (адже перпендикулярність — окремий випадок перетину). Помилково поділяти за величиною нерозгорнуті кути на гострі й тупі, оскільки є ще й прямі кути.

Дуже важливо здійснювати класифікацію лише за однією основою. Наприклад, неправильним було б поділяти трикутники на гострокутні, прямокутні, тупокутні й рівнобедрені,



Гострокутний Прямокутний Тупокутний

Рис. 143. Види трикутників за величиною кутів

www.e-ranok.com.ua

адже рівнобедреним може бути і гострокутний, і прямокутний, і тупокутний трикутник. Припуститися такої помилки — те саме, що поділити всіх людей на чоловіків, жінок і вчителів.

Приклади класифікацій неважко знайти й в інших науках. Так, філологи поділяють члени речення на головні (підмет і присудок) і другорядні (додаток, означення та обставина). Спробуйте знайти приклади класифікацій у фізиці, географії, біології.

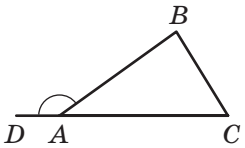


Рис. 144. Зовнішній кут трикутника ABC при вершині A

16.3. Зовнішній кут трикутника та його властивості

Означення

Зовнішнім кутом трикутника називається кут, суміжний із внутрішнім кутом даного трикутника.

На рис. 144 кут DAB — зовнішній кут трикутника ABC при вершині A.

Очевидно, що при будь-якій вершині трикутника можна побудувати два зовнішні кути, які один стосовно одного є вертикальними (рис. 145).

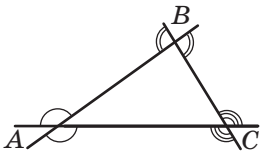


Рис. 145. Зовнішні кути трикутника ABC

Теорема (про зовнішній кут трикутника)

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних із ним.

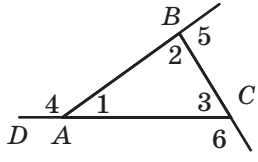


Рис. 146. Зовнішній кут 4 дорівнює сумі кутів 2 і 3

Доведення

□ Нехай кути 1, 2 і 3 — внутрішні кути трикутника ABC, а $\angle 4$ — зовнішній кут, суміжний із кутом 1 (рис. 146). За теоремою про суму кутів трикутника $\angle 2+\angle 3=180^\circ-\angle 1$. З іншого боку, за теоремою про суміжні кути $\angle 4=180^\circ-\angle 1$. Звідси $\angle 4=\angle 2+\angle 3$, що й треба було довести. ■

www.e-ranok.com.ua

Наслідок

Сума зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.

Справді, за доведеною теоремою (рис. 146) $\angle 6 = \angle 1 + \angle 2$, $\angle 4 = \angle 2 + \angle 3$ і $\angle 5 = \angle 1 + \angle 3$. Тоді для їхньої суми маємо: $\angle 6 + \angle 4 + \angle 5 = (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 2 + \angle 3) + (\angle 1 + \angle 3) = 2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

Запитання й задачі

Усні вправи

406. Чи може трикутник мати три тупі кути; два тупі кути; не мати жодного тупого кута?

407. Чи може кут при основі рівнобедреного трикутника бути тупим; прямим?

408. Чи може прямокутний трикутник бути рівнобедреним; рівностороннім?

409. Чи можуть бути рівними тупокутний і прямокутний трикутники; тупокутний і гострокутний трикутники?

410. Дано три зовнішні кути трикутника при різних вершинах. Скільки з них можуть бути гострими?

Графічні вправи

411. Накресліть гострокутний трикутник ABC.

а) Виміряйте кути трикутника та обчисліть їхню суму.

б) На промені AC позначте точку D, яка не належить відрізку AC. Визначте градусну міру кута BCD, користуючись теоремою про зовнішній кут трикутника.

в) Визначте вид трикутника BCD за величиною кутів.

www.e-ranok.com.ua

412. Накресліть трикутник ABC з тупим кутом A.

а) Проведіть висоту BD і визначте вид трикутника ABD за величиною кутів.

б) Виміряйте кут BAD. Як пов'язана його градусна міра з градусними мірами кутів трикутника ABC?

Письмові вправи

Рівень А

413. Знайдіть невідомий кут трикутника, якщо два його кути дорівнюють:

а) $65°$ і $45°$; б) $120°$ і $18°$; в) $90°$ і $64°$.

414. Знайдіть невідомі кути рівнобедреного трикутника, якщо:

а) кут при його основі дорівнює $40°$;

б) кут, протилежний його основі, дорівнює $40°$.

415. Знайдіть невідомі кути трикутника:

а) прямокутного, з кутом $28°$;

б) рівнобедреного, з кутом при основі $80°$.

416. Доведіть методом від супротивного, що кут при основі рівнобедреного трикутника не може бути тупим.

417. Доведіть методом від супротивного, що трикутник не може мати більш ніж один прямий кут.

418. Знайдіть внутрішні кути трикутника, якщо зовнішні кути при двох його вершинах дорівнюють $135°$ і $110°$.

419. Один із внутрішніх кутів трикутника дорівнює $40°$, а один із зовнішніх — $125°$. Знайдіть решту внутрішніх і зовнішніх кутів.

Рівень Б

420. Знайдіть усі кути трикутника, якщо:

а) один із них удвічі менший за другий і на $20°$ більший за третій;

б) їхні градусні міри відносяться як $1:3:5$.

421. Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює $50°$. Знайдіть решту кутів. Скільки розв'язків має задача?

422. Знайдіть:

а) кути трикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як $2:7:9$;

б) кути рівнобедреного трикутника, якщо один із них дорівнює $100°$.

www.e-ranok.com.ua

423. Чи може трикутник із кутом $40°$ дорівнювати трикутнику з кутом $140°$? Відповідь обґрунтуйте.

424. Трикутник із кутом $120°$ дорівнює трикутнику з кутом $30°$. Доведіть, що ці трикутники рівнобедрені.

425. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено бісектрису AD. Знайдіть кути цього трикутника, якщо $\angle ADC = 150°$.

426. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC. Знайдіть кут A, якщо $\angle C = 35°$, $\angle BDC = 105°$.

427. У трикутнику ABC бісектриси, проведені з вершин A і B, перетинаються в точці O. Знайдіть кут AOB, якщо $\angle A = 82°$, $\angle B = 38°$.

428. У рівнобедреному трикутнику ABC бісектриси, проведені з вершин при основі AC, перетинаються в точці O. Знайдіть кути трикутника, якщо $\angle AOC = 140°$.

429. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює $60°$. Знайдіть внутрішні кути трикутника.

430. Зовнішні кути трикутника відносяться як $3:4:5$. Знайдіть внутрішні кути трикутника.

431. Знайдіть внутрішні кути трикутника, якщо сума двох із них дорівнює $150°$, а один із зовнішніх кутів дорівнює $80°$.

Рівень В

432. Бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена з вершини кута при основі, дорівнює основі трикутника. Знайдіть його кути.

433. Бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена з вершини кута при основі, перетинає бічну сторону під кутом, який дорівнює куту при основі. Знайдіть кути трикутника.

434. Бісектриса зовнішнього кута при основі рівнобедреного трикутника перетинає продовження бічної сторони. Довжина відрізка бісектриси від початку до точки перетину дорівнює основі трикутника. Знайдіть внутрішні кути трикутника.

435. Бісектриса зовнішнього кута при основі рівнобедреного трикутника перетинає продовження бічної сторони під кутом, який дорівнює куту при основі трикутника. Знайдіть кути трикутника.

436. У трикутнику ABC бісектриси, проведені з вершин A і C, перетинаються в точці O. Знайдіть кут AOC, якщо $\angle B = \alpha$.

www.e-ranok.com.ua

437. Бісектриса зовнішнього кута рівнобедреного трикутника при вершині, протилежній основі, паралельна основі трикутника. Доведіть.

438. Сформулюйте й доведіть твердження, обернене до твердження попередньої задачі.

Повторення перед вивченням § 17

Теоретичний матеріал

- ознаки рівності трикутників
- медіана, бісектриса й висота трикутника

§ 8, 10, 13

§ 12

Задачі

439. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle DBC$, причому точка C лежить на відрізку AD. Доведіть, що рівні трикутники прямокутні.

440. Рівнобедрені трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC (точки B і D лежать по один бік від прямої AC). Доведіть, що $BD \perp AC$.

www.e-ranok.com.ua

§ 17 Прямокутні трикутники. Ознаки та властивості прямокутних трикутників

17.1. Елементи прямокутного трикутника

Як відомо, прямокутний трикутник має один прямий і два гострі кути. Сторона прямокутного трикутника, протилежна прямому куту, називається **гіпотенузою**, дві інші сторони — **катетами**. На рис. 147 у трикутнику ABC $\angle B = 90°$, AC — гіпотенуза, AB і BC — катети.

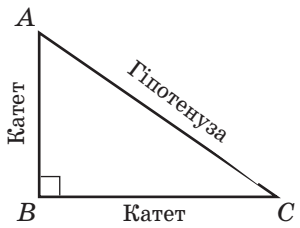


Рис. 147. Прямокутний трикутник

З теореми про суму кутів трикутника випливає: ***сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює*** $\mathbf{90°}$. Справджується також обернене твердження — ознака прямокутного трикутника: ***якщо в трикутнику сума двох кутів дорівнює*** $\mathbf{90°}$ ***, то цей трикутник прямокутний.***

Гіпотенуза — від грецького «гіпотейнуса» — та, що стягує. Назва пов'язана зі способом побудови прямокутних трикутників натягуванням мотузки

17.2. Ознаки рівності прямокутних трикутників

Користуючись ознаками рівності трикутників і теоремою про суму кутів трикутника, можна сформулювати ознаки рівності, характерні тільки для прямокутних трикутників.

Наведемо спочатку дві з них.

Ознака рівності прямокутних трикутників за двома катетами (рис. 148)

Якщо два катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють двом катетам другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

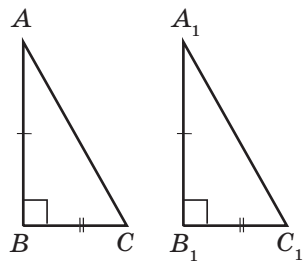


Рис. 148. Прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за двома катетами

www.e-ranok.com.ua

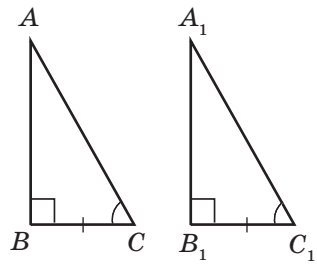


Рис. 149. Прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за катетом і прилеглим гострим кутом

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим гострим кутом (рис. 149)

Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому до нього гострому куту другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Ці ознаки — окремі випадки першої та другої ознак рівності трикутників.

Наступні дві ознаки неважко дістати з другої ознаки рівності трикутників, використовуючи теорему про суму кутів трикутника.

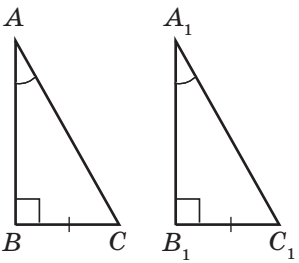


Рис. 150. Прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за катетом і протилежним кутом

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і протилежним кутом (рис. 150)

Якщо катет і протилежний йому кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному йому куту другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

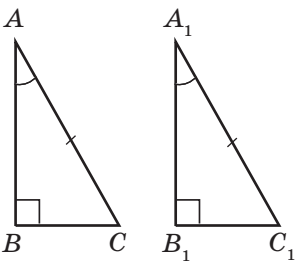


Рис. 151. Прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за гіпотенузою й гострим кутом

Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою й гострим кутом (рис. 151)

Якщо гіпотенуза й гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Справді, якщо дані трикутники мають по рівному гострому куту α, то інші гострі кути цих трикутників дорівнюють $90° - \alpha$, тобто також відповідно рівні.

Ще одну ознаку рівності прямокутних трикутників доведемо окремо.

Теорема (ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою й катетом)

Якщо гіпотенуза й катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й катету другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

www.e-ranok.com.ua

Доведення

□ Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — дані прямокутні трикутники, у яких $\angle B = \angle B_1 = 90°$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (рис. 152). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

На променях CB і C_1B_1 відкладемо відрізки BD і B_1D_1, що дорівнюють даним катетам BC і B_1C_1 відповідно. Тоді $\triangle ABD = \triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1D_1 = \triangle A_1B_1C_1$ за двома катетами. Із цих рівностей маємо: $AD = AC = A_1C_1 = A_1D_1$. Це означає, що $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$ за трьома сторонами. Звідси $\angle C = \angle C_1$. І нарешті, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за гіпотенузою й гострим кутом. Теорему доведено. ■

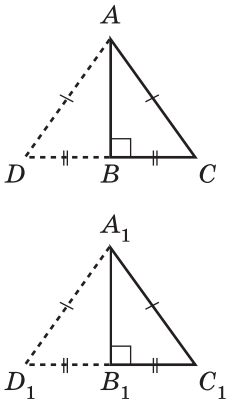


Рис. 152. Прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за гіпотенузою й катетом

Звернемо увагу на додаткову побудову, що полягає в добудові прямокутного трикутника до рівнобедреного. Такий прийом дозволяє застосовувати властивості рівнобедреного трикутника в ході розв'язування задач, в умовах яких про рівнобедрений трикутник не йдеться.

17.3*. Прямокутний трикутник із кутом 30°

Прямокутний трикутник, у якому один із гострих кутів дорівнює $30°$, має корисну властивість.

Опорна задача

У прямокутному трикутнику катет, протилежний куту 30°, дорівнює половині гіпотенузи. Доведіть.

Розв'язання

Нехай у трикутнику ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 90°$. Доведемо, що $BC = 0{,}5\,AC$. Очевидно, що в трикутнику ABC $\angle C = 60°$. Відкладемо на промені CB відрізок BD, який дорівнює BC (рис. 153). Прямокутні трикутники ABC і ABD рівні за двома катетами. Звідси випливає, що $\angle D = \angle C = 60°$ і $\angle DAC = 30° + 30° = 60°$. Таким чином, трикутник DAC є рівностороннім, а відрізок AB — його медіана, тобто $BC = 0{,}5\,DC = 0{,}5\,AC$, що й треба було довести.

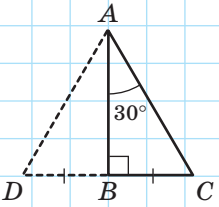


Рис. 153

www.e-ranok.com.ua

Катет – від грецького «катетос» – висок

Справджується також обернене твердження **(опорне):**

якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, протилежний цьому катету, дорівнює $30°$.

Спробуйте довести це твердження самостійно за допомогою додаткової побудови, аналогічної щойно описаній.

Запитання й задачі

Усні вправи

441. У прямокутному трикутнику ABC $\angle A+\angle B=\angle C$. Назвіть гіпотенузу трикутника.

442. У прямокутному трикутнику DEF висота EA лежить усередині трикутника. Назвіть катети трикутника.

443. Прямокутний трикутник із гострим кутом α дорівнює прямокутному трикутнику з гострим кутом $20°$. Яким може бути значення α?

444. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$, $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$. За якими ознаками можна довести рівність цих трикутників, якщо:

а) кут A прямий;

б) кут B прямий?

445. Чи можуть нерівні прямокутні трикутники мати дві пари відповідно рівних катетів; рівні гіпотенузи?

Графічні вправи

446. Накресліть прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AB.

а) Виміряйте кут A і обчисліть градусну міру кута B.

б) Позначте на рисунку найменший зовнішній кут трикутника. Якою є його градусна міра?

в) Проведіть висоти трикутника. Скільки відрізків ви провели?

www.e-ranok.com.ua

447. Накресліть рівнобедрений трикутник ABC з основою AC.

а) Проведіть висоту BD. Виділіть кольорами рівні трикутники й доведіть їхню рівність за допомогою різних ознак рівності прямокутних трикутників.

б) Назвіть висоти трикутника BCD, проведені до катетів.

Письмові вправи

Рівень А

448. Знайдіть кути рівнобедреного прямокутного трикутника.

449. У рівносторонньому трикутнику ABC проведено медіану AD. Знайдіть кути трикутника CAD.

450. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо:

а) один із цих кутів у п'ять разів менший, ніж другий;

б) їхня різниця дорівнює $10°$.

451. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо:

а) один із його зовнішніх кутів дорівнює $130°$;

б) їхні градусні міри відносяться як $2:7$.

452. На рис. 154 $\angle A = \angle C$, $\angle ADB = \angle CDB$. Доведіть рівність трикутників ADB і CDB.

453. На рис. 155 $AD \parallel BC$, $\angle BAC = \angle DCA = 90°$. Доведіть рівність трикутників BAC і DCA.

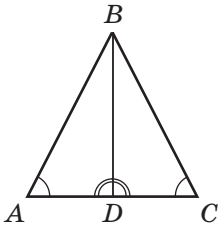


Рис. 154

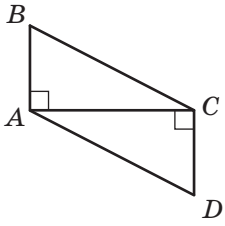


Рис. 155

454. У трикутнику ABC кути A і C гострі, BD — висота трикутника. Яка з точок A, C, D лежить між двома іншими?

455. У трикутнику ABC кут C тупий, BD — висота трикутника. Яка з точок A, C, D лежить між двома іншими?

456. У прямокутному трикутнику ABC до гіпотенузи проведено висоту BH. Знайдіть кути трикутника ABH, якщо $\angle C = 25°$.

457. У трикутнику ABC висота AD ділить кут A на два кути, причому $\angle BAD = 38°$, $\angle CAD = 42°$. Знайдіть кути трикутника ABC.

www.e-ranok.com.ua

Рівень Б

458. У прямокутному трикутнику ABC з гіпотенузою AC $\angle A = 45°$, $AB = 8$ см. Знайдіть катет BC.

459. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до бічної сторони, утворює з основою трикутника кут $35°$. Знайдіть кути даного трикутника.

460. У трикутнику ABC $\angle B = 90°$. Бісектриса кута A перетинає катет BC під кутом $74°$. Знайдіть гострі кути трикутника ABC.

461. Якщо в трикутнику дві висоти рівні, то цей трикутник рівнобедрений. Доведіть.

462. Сформулюйте й доведіть твердження, обернене до твердження попередньої задачі.

463. У трикутнику ABC проведено висоту BD. Знайдіть кути цього трикутника, якщо $\angle ABD = 25°$, $\angle CBD = 40°$. Скільки розв'язків має задача?

464. Бісектриса, проведена з вершини прямого кута трикутника, перетинає гіпотенузу під кутом $70°$. Знайдіть кути, які утворює з катетами висота, проведена до гіпотенузи.

465. Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і висотою, проведеною до гіпотенузи.

466. Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і бісектрисою, проведеною до гіпотенузи.

467. У рівнобедреному трикутнику KMN з основою KN висоти KA і NB перетинаються в точці O. Знайдіть кути цього трикутника, якщо $\angle KON = 140°$.

468. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC висоти AD і BE перетинаються під кутом $50°$. Знайдіть кути цього трикутника.

Рівень В

469 (опорна). Медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи. Доведіть.

470 (опорна). Якщо медіана трикутника дорівнює половині сторони, до якої її проведено, то цей трикутник прямокутний. Доведіть.

471. Кут між бісектрисою і висотою, проведеними з вершини найбільшого кута прямокутного трикутника, дорівнює $22°$. Знайдіть гострі кути трикутника.

www.e-ranok.com.ua

472. Висота, проведена з вершини при основі рівнобедреного трикутника, ділить навпіл кут між основою і бісектрисою кута при основі. Знайдіть кути цього трикутника.

473. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює $60°$, а різниця між гіпотенузою і катетом, прилеглим до цього кута, становить 6 см. Знайдіть ці сторони трикутника.

474. У трикутнику ABC $\angle B = 90°$, а зовнішній кут при вершині C дорівнює $120°$. Знайдіть сторони BC і AC, якщо їхня сума становить 21 см.

475. У прямокутному трикутнику катет, прилеглий до кута $30°$, дорівнює 18 см. Знайдіть довжину бісектриси трикутника, проведеної до цього катета.

476. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$. Бісектриса BE утворює з катетом AC кут $60°$. Знайдіть катет AC, якщо $CE = 4$ см.

Повторення перед вивченням § 18

Теоретичний матеріал

- властивості точок і прямих
- рівнобедрений трикутник

п. 1.2; § 11

Задачі

477. У трикутнику ABC медіана BM дорівнює стороні BC. Відрізок BH — висота трикутника. Знайдіть довжину сторони AC, якщо $HC = 2$ см.

478. У трикутнику ABC бісектриса BL дорівнює стороні BC. Відрізок BH — висота трикутника. Знайдіть кут ABC, якщо $\angle CBH = 20°$.

www.e-ranok.com.ua

§ 18 Співвідношення між сторонами і кутами трикутника. Нерівність трикутника

18.1. Співвідношення між сторонами і кутами трикутника

Теорема (співвідношення між сторонами і кутами трикутника)

У трикутнику:
1) проти більшої сторони лежить більший кут;
2) проти більшого кута лежить більша сторона.

Доведення

□ Теорема містить два твердження — пряме й обернене. Доведемо кожне з них окремо.

1) Нехай у трикутнику ABC $AB > AC$. Доведемо, що $\angle C > \angle B$. Відкладемо на стороні AB відрізок AD, який дорівнює стороні AC (рис. 156). Оскільки $AD < AB$, то точка D лежить між точками A і B, отже, кут 1 є частиною кута C, тобто $\angle C > \angle 1$. Очевидно, що трикутник ADC є рівнобедреним з основою DC, звідки $\angle 1 = \angle 2$.

Крім того, кут 2 — зовнішній кут трикутника BDC, тому $\angle 2 > \angle B$.

Отже, маємо: $\angle B < \angle 2$, $\angle 2 = \angle 1$, $\angle 1 < \angle C$, звідки $\angle B < \angle C$.

2) Нехай у трикутнику ABC $\angle C > \angle B$. Доведемо від супротивного, що $AB > AC$. Якщо це не так, то $AB = AC$ або $AB < AC$. У першому випадку трикутник ABC рівнобедрений з основою BC, тобто $\angle B = \angle C$. У другому випадку за щойно доведеним твердженням проти більшої сторони має лежати більший кут, тобто $\angle B > \angle C$. В обох випадках маємо суперечність із умовою $\angle C > \angle B$. Таким чином, наше припущення є хибним, тобто $AB > AC$. Теорему доведено. ■

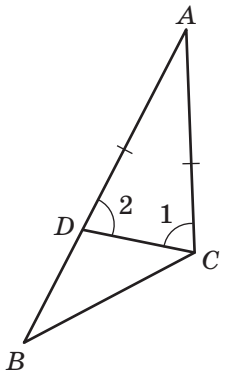


Рис. 156. До доведення співвідношення між сторонами і кутами трикутника

www.e-ranok.com.ua

Наслідок 1

У тупокутному трикутнику сторона, яка лежить проти тупого кута, найбільша.

Наслідок 2

У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за катет.

18.2. Нерівність трикутника

Теорема (нерівність трикутника)

У трикутнику кожна сторона менша за суму двох інших сторін.

Доведення

□ Розглянемо довільний трикутник ABC і доведемо, що $AC < AB + BC$. Відкладемо на продовженні сторони AB відрізок BD, який дорівнює стороні BC (рис. 157). Трикутник BCD рівнобедрений з основою CD, звідки $\angle 1 = \angle 2$. Але кут 2 є частиною кута ACD, тобто $\angle 2 < \angle ACD$. Таким чином, у трикутнику ACD $\angle C > \angle D$. З огляду на співвідношення між сторонами і кутами трикутника, маємо: $AC < AD = AB + BD = AB + BC$. Теорему доведено. ■

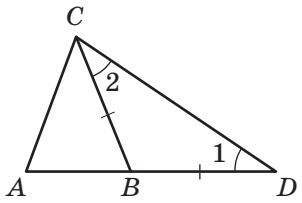


Рис. 157. До доведення нерівності трикутника

Наслідок

Якщо для трьох точок A, B, C справджується рівність $AC = AB + BC$, то ці точки лежать на одній прямій, причому точка B лежить між точками A і C.

Справді, якщо точка B не лежить на прямій AC, то за нерівністю трикутника $AC < AB + BC$. Якщо точка B лежить на прямій AC поза відріз-

www.e-ranok.com.ua



ком AC, ця нерівність також очевидно справджується. Залишається єдина можливість: точка B лежить на відрізку AC.

Нерівність трикутника дозволяє проаналізувати існування, а отже, і можливість побудови трикутника із заданими сторонами. Зокрема, якщо хоч одне з трьох додатних чисел a, b, c більше за суму двох інших або дорівнює їй, то побудувати трикутник зі сторонами a, b, c неможливо.

З нерівністю трикутника пов'язана класична задача про знаходження найкоротшого шляху на площині. Її розв'язання було відоме ще великому давньогрецькому вченому Архімедові (287–212 рр. до н. е.).

Задача

Точки A і B лежать по один бік від прямої c. Знайдіть на цій прямій таку точку C, щоб сума відстаней $AC + CB$ була найменшою (рис. 158).

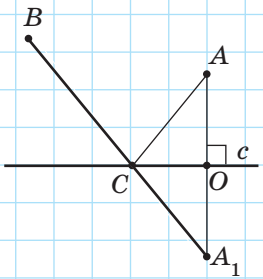


Рис. 158

Розв'язання

Проведемо з точки A перпендикуляр AO до прямої c і відкладемо на його продовженні відрізок OA_1, що дорівнює AO. Для будь-якої точки C прямої c прямокутні трикутники AOC і A_1OC рівні за двома катетами, звідки $AC = A_1C$ і $AC + CB = A_1C + CB$. Очевидно, що за наслідком з нерівності трикутника сума $A_1C + CB$ буде найменшою у випадку, коли точки A_1, C і B лежатимуть на одній прямій. Таким чином, шукана точка має бути точкою перетину відрізка A_1B з прямою c.

Зауважимо, що в умовах цієї задачі прямі AC і CB утворюють із прямою c рівні кути. Саме так поширюється промінь світла, що виходить із точки A, відбивається від прямої c і потрапляє в точку B. Фізики в такому разі кажуть, що кут падіння світлового променя дорівнює куту відбивання.

www.e-ranok.com.ua

Запитання й задачі

Усні вправи

479. Назвіть:

а) найбільшу сторону трикутника DEF, якщо $\angle D < \angle E < \angle F$;

б) найменший кут трикутника MNK, якщо $MK > NK > MN$.

480. З однієї вершини трикутника проведено медіану, бісектрису й висоту, причому жодні два з цих відрізків не збігаються. Який із цих відрізків є найменшим?

481. Визначте:

а) чи можуть сторони трикутника дорівнювати 13 см, 20 см і 6 см;

б) чи може сторона трикутника становити половину його периметра;

в) чи можуть сторони трикутника відноситися як $2:3:5$;

г) чи може основа рівнобедреного трикутника бути втричі більшою, ніж бічна сторона?

482. У трикутнику ABC сторона AC найменша. Чи може кут B бути прямим або тупим? Відповідь обґрунтуйте.

483. У рівнобедреному трикутнику одна сторона дорівнює 16 см, а інша — 5 см. Знайдіть довжину основи трикутника.

Графічні вправи

484. Накресліть трикутник ABC, у якому $\angle C = 100°$.

а) Назвіть найбільшу сторону трикутника й перевірте свою відповідь за допомогою вимірювань.

б) Виміряйте всі сторони трикутника й перевірте, чи виконується нерівність трикутника для сторін трикутника ABC.

в) Користуючись результатами вимірювань, назвіть найменший кут трикутника.

485. Накресліть гострокутний трикутник ABC.

а) Виміряйте кути трикутника й визначте його найбільшу і найменшу сторони.

б) Проведіть медіану BD. Запишіть нерівність трикутника для сторони BD у трикутниках ABD і CBD.

www.e-ranok.com.ua

Письмові вправи

Рівень А

486. У трикутнику ABC $AB = 3{,}3$ см, $BC = 3\frac{1}{3}$ см, $AC = 3\frac{19}{60}$ см. Назвіть найбільший кут трикутника.

487. У трикутнику ABC $AB < BC$, $\angle A < \angle B$. Назвіть найменший кут трикутника.

488. У прямокутному трикутнику ABC $\angle B < \angle C$, $AB < BC$. Назвіть гіпотенузу трикутника.

489. Знайдіть сторону рівнобедреного трикутника, якщо дві інші його сторони дорівнюють:

а) 14 см і 6 см;

б) 5 см і 10 см;

в) 3 см і 4 см.

490. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, дві сторони якого дорівнюють 2 см і 7 см.

491. Точка на основі рівнобедреного трикутника, відмінна від вершини, сполучена з вершиною, протилежною основі. Доведіть, що отриманий відрізок менший за бічну сторону трикутника.

492. Доведіть, що кожна сторона трикутника більша, ніж різниця двох інших сторін.

493. Доведіть, що точки A, B і C лежать на одній прямій, якщо $AB = 12{,}3$ см, $BC = 9{,}7$ см, $AC = 2{,}6$ см.

494. Визначте, чи лежать точки A, B і C на одній прямій, якщо:

а) $AB = 7{,}5$ см, $BC = 8{,}3$ см, $AC = 11{,}5$ см;

б) $AB = 16{,}3$ см, $BC = 0{,}8$ см, $AC = 15{,}5$ см.

Рівень Б

495. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB > BC$, $\angle B > \angle A$. Назвіть основу трикутника.

496. У трикутнику ABC $\angle A = \angle C$. Назвіть найменший кут трикутника, якщо $AC < AB$.

497. Сторона рівнобедреного трикутника на 3 см більша за іншу сторону. Знайдіть усі сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 18 см.

www.e-ranok.com.ua

498. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 70 м. Знайдіть сторони трикутника, якщо одна з них дорівнює 10 м.

499. Дві сторони трикутника дорівнюють 1,2 м і 0,4 м. Знайдіть довжину третьої сторони, якщо вона вимірюється цілим числом метрів.

500. Доведіть, що медіана трикутника менша, ніж половина його периметра.

501. Доведіть, що кожна сторона трикутника менша, ніж половина його периметра.

Рівень В

502. У прямокутному трикутнику ABC відрізок CD — бісектриса, проведена з вершини прямого кута. Назвіть найменшу сторону трикутника, якщо кут CDA тупий.

503. У прямокутному трикутнику ABC до гіпотенузи проведено висоту CD. Назвіть найменший кут трикутника, якщо $AD < BD$.

504. Висота тупокутного трикутника, проведена з вершини гострого кута, лежить поза трикутником. Доведіть.

505. Дано додатні числа a і b. Відомо, що існує трикутник зі сторонами $a+5b$, $5a+6b$ і $3a+2b$. Яке з чисел більше: a чи b?

506. Дві сторони трикутника дорівнюють a і b $(a>b)$. У яких межах може змінюватися:

а) довжина третьої сторони;

б) периметр трикутника?

507. Доведіть, що медіана трикутника менша, ніж півсума сторін, між якими вона проходить.

508. Доведіть, що сума висот трикутника менша, ніж його периметр.

Повторення перед вивченням § 19

Теоретичний матеріал

- коло і круг
- властивість медіани, бісектриси й висоти рівнобедреного трикутника

5 клас; п. 12.2

www.e-ranok.com.ua

Задачі

509. На площині позначено точку O. Скільки точок, віддалених від точки O на задану відстань a, існує:

а) на промені з початком O;

б) на прямій, що проходить через точку O;

в) на двох прямих, що перетинаються в точці O;

г) на площині?

Висловіть припущення.

510. Прямі a і b перетинаються в точці O. На прямій a від точки O відкладено рівні відрізки OA і OC, на прямій b — рівні відрізки OB і OD. Запишіть усі утворені пари рівних трикутників і доведіть їхню рівність.

Онлайн-тренування для підготовки до контрольної роботи № 3

Задачі для підготовки до контрольної роботи № 3

1. Визначте, чи є паралельними прямі a і b, якщо $\angle 1 = 36^\circ$, а кут 2 в 4 рази менший, ніж кут 3 (рис. 159).

2. Знайдіть усі кути, утворені в результаті перетину двох паралельних прямих січною, якщо внутрішні односторонні кути відносяться як $11:25$.

3. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо кут A на 35° менший, ніж кут B, а кут B на 25° більший за кут C.

4. Бісектриси кутів A і C трикутника ABC перетинаються в точці O, $\angle AOC = 100^\circ$. Знайдіть $\angle ABC$.

5. Доведіть, що трикутники ABD і DCA рівні, якщо $\angle B = \angle C = 90^\circ$ і $AO = DO$ (рис. 160).

6. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle ADB = 120^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, $AD = 16$ см (рис. 161). Знайдіть CD.

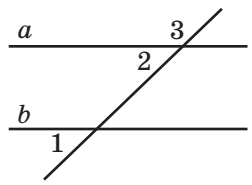


Рис. 159

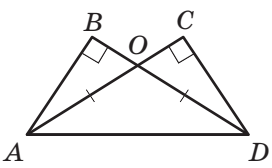


Рис. 160

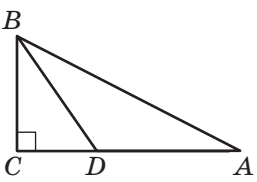
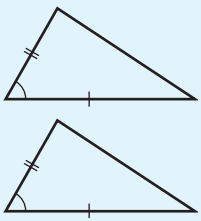
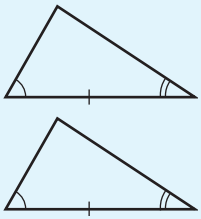
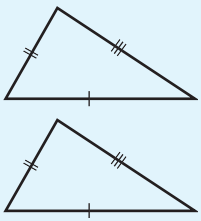
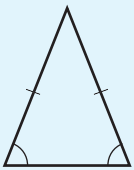
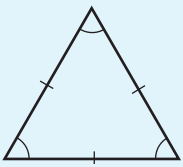


Рис. 161

www.e-ranok.com.ua

Підсумки

ПІДСУМКОВИЙ ОГЛЯД РОЗДІЛУ II

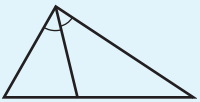
<table>
<tr><th colspan="3">ТРИ ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ</th></tr>
<tr><td>Перша ознака
(за двома сторонами й кутом між ними)</td><td>  </td><td>Якщо дві сторони й кут між ними одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні</td></tr>
<tr><td>Друга ознака
(за стороною та прилеглими до неї кутами)</td><td>  </td><td>Якщо сторона та прилеглі до неї кути одного трикутника відповідно дорівнюють стороні та прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні</td></tr>
<tr><td>Третя ознака
(за трьома сторонами)</td><td>  </td><td>Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні</td></tr>
<tr><th colspan="2">РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК</th><th>РІВНОСТОРОННІЙ ТРИКУТНИК</th></tr>
<tr><td colspan="2"> 
Рівнобедрений трикутник — трикутник, у якого дві сторони рівні.
У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.
Якщо у трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений</td><td> 
Рівносторонній трикутник — трикутник, у якого всі сторони рівні.
У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.
Якщо в трикутнику всі кути рівні, то він рівносторонній</td></tr>
</table>

www.e-ranok.com.ua

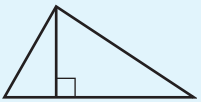
МЕДІАНА, БІСЕКТРИСА Й ВИСОТА ТРИКУТНИКА



Медіаною трикутника називається відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони



Бісектрисою трикутника називається відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину цього кута з точкою на протилежній стороні



Висотою трикутника називається перпендикуляр, проведений із вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону

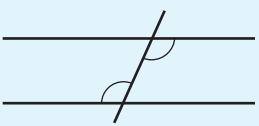
ВЛАСТИВІСТЬ МЕДІАНИ, БІСЕКТРИСИ Й ВИСОТИ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

У рівнобедреному трикутнику медіана, бісектриса й висота, проведені до основи, збігаються

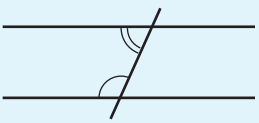
ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ДВОХ ПРЯМИХ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ ТРЕТЬОЮ

Якщо при перетині двох прямих третьою виконується принаймні одна з умов:

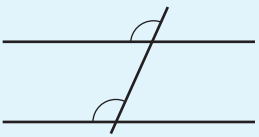
1) внутрішні різносторонні кути рівні;



2) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°;



3) відповідні кути рівні,
то прямі паралельні



ВЛАСТИВОСТІ КУТІВ, УТВОРЕНИХ ПРИ ПЕРЕТИНІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ

Якщо січна перетинає дві паралельні прямі, то:

1) внутрішні різносторонні кути рівні;

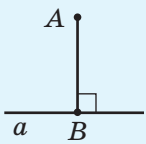
2) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°;

3) відповідні кути рівні

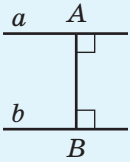
www.e-ranok.com.ua

ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ І ВІДСТАНІ

Теорема про існування і єдиність перпендикулярної прямої
Через будь-яку точку площини можна провести пряму, перпендикулярну до даної, і тільки одну



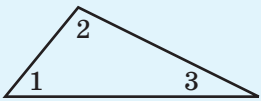
Відстань від точки до прямої — довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної прямої



Відстань між паралельними прямими — відстань від будь-якої точки однієї з цих прямих до другої прямої

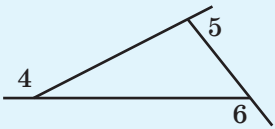
СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА

Сума кутів трикутника дорівнює 180°



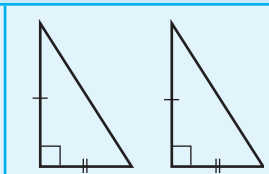
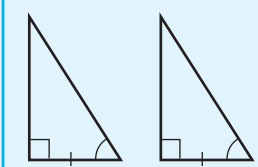
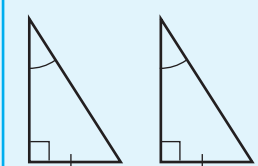
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

Сума зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°

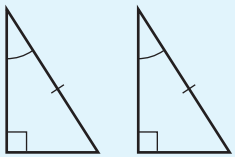
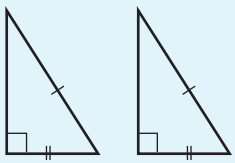
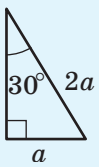


$\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360°$

ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

За двома катетами		Якщо два катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють двом катетам другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні
За катетом і прилеглим гострим кутом		Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому до нього гострому куту другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні
За катетом і протилежним кутом		Якщо катет і протилежний йому кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному йому куту другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні

www.e-ranok.com.ua

<table>
<tr><th colspan="3">ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ (продовження)</th></tr>
<tr><td>За гіпотенузою й гострим кутом</td><td>  </td><td>Якщо гіпотенуза й гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні</td></tr>
<tr><td>За гіпотенузою й катетом</td><td>  </td><td>Якщо гіпотенуза й катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й катету другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні</td></tr>
<tr><th colspan="3">ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК ІЗ КУТОМ 30°</th></tr>
<tr><td>У прямокутному трикутнику катет, протилежний куту 30°, дорівнює половині гіпотенузи</td><td> 
</td><td>Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, протилежний цьому катету, дорівнює 30°</td></tr>
<tr><th colspan="3">СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ І КУТАМИ ТРИКУТНИКА</th></tr>
<tr><td colspan="3">У трикутнику:
1) проти більшої сторони лежить більший кут;
2) проти більшого кута лежить більша сторона</td></tr>
<tr><th colspan="3">НЕРІВНІСТЬ ТРИКУТНИКА</th></tr>
<tr><td colspan="3">У трикутнику кожна сторона менша за суму двох інших сторін</td></tr>
</table>

Контрольні запитання

1. Дайте означення трикутника.

2. Які фігури називаються рівними?

3. Сформулюйте й доведіть першу ознаку рівності трикутників.

4. Сформулюйте й доведіть теорему про існування і єдиність прямої, перпендикулярної до даної.

www.e-ranok.com.ua

5. Дайте означення перпендикуляра й відстані від точки до прямої.

6. Сформулюйте й доведіть другу ознаку рівності трикутників.

7. Дайте означення рівнобедреного трикутника. Як називаються його сторони?

8. Сформулюйте й доведіть властивість кутів рівнобедреного трикутника.

9. Сформулюйте й доведіть ознаку рівнобедреного трикутника.

10. Дайте означення рівностороннього трикутника. Сформулюйте його властивість і ознаку.

11. Дайте означення медіани, бісектриси й висоти трикутника.

12. Сформулюйте й доведіть властивість медіани, бісектриси та висоти рівнобедреного трикутника.

13. Сформулюйте й доведіть третю ознаку рівності трикутників.

14. Поясніть за рисунком, які кути при двох прямих і січній називаються внутрішніми різносторонніми, внутрішніми односторонніми, відповідними.

15. Сформулюйте й доведіть ознаку паралельності двох прямих, які перетинаються третьою. Сформулюйте наслідки з цієї теореми.

16. Сформулюйте теорему про існування і єдиність прямої, паралельної даній, і доведіть існування такої прямої.

17. Сформулюйте й доведіть властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною.

18. Доведіть теорему про відстані від точок прямої до паралельної їй прямої. Дайте означення відстані між паралельними прямими.

19. Сформулюйте й доведіть теорему про суму кутів трикутника. Які наслідки вона має?

20. Назвіть види трикутників за величиною кутів.

21. Дайте означення зовнішнього кута трикутника.

22. Сформулюйте й доведіть теорему про зовнішній кут трикутника.

23. Як називаються сторони прямокутного трикутника?

24. Сформулюйте ознаки рівності прямокутних трикутників. Доведіть рівність прямокутних трикутників за гіпотенузою й катетом.

25. Сформулюйте властивість прямокутного трикутника з кутом 30°.

26. Сформулюйте й доведіть теорему про співвідношення сторін і кутів трикутника. Які наслідки вона має?

27. Сформулюйте й доведіть нерівність трикутника.

www.e-ranok.com.ua

Додаткові задачі

511. Доведіть рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:

а) $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1 = 85°$, $\angle B = 40°$, $\angle C_1 = 55°$;

б) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = 30°$, $\angle A_1 = 72°$, $\angle C_1 = 78°$.

512. Через вершини трикутника проведено прямі, паралельні протилежним сторонам. Скільки трикутників, що дорівнюють даному, при цьому утворилося? Доведіть їхню рівність.

513. Кут одного з двох рівних трикутників дорівнює сумі двох кутів другого трикутника. Доведіть, що ці трикутники прямокутні.

514. У трикутниках ABC і MNK $AB = MN$, $\angle A = \angle M$, $\angle B \neq \angle N$. Чи може трикутник ABC дорівнювати трикутнику з вершинами M, N, K?

515. Чотири паралельні прямі перетинають трикутник. Доведіть, що принаймні одна з них не проходить через вершину трикутника.

516. Сторони трикутника лежать на прямих, кути між якими дорівнюють $20°$, $30°$ і $50°$. Знайдіть кути трикутника.

517. Чи можуть бісектриси двох кутів трикутника бути взаємно перпендикулярними? Відповідь обґрунтуйте.

518. Доведіть, що дві висоти трикутника не можуть точкою перетину ділитися навпіл.

519. Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за бічною стороною й кутом при основі.

520. Трикутники ABC, BCD і DCE рівносторонні. Доведіть:

а) паралельність прямих AE і BD;

б) рівність трикутників ABD і EDB;

в) рівність трикутників ABE і EDA.

Знайдіть кути трикутника ABE.

521. Трикутники ABC і AB_1C рівні, причому точки B і B_1 лежать по різні боки від прямої AC. Доведіть, що перпендикуляри, проведені з точок B і B_1 до прямої AC, мають спільну основу.

522. Пряма CD перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину. Доведіть рівність трикутників ACD і BCD.

523. Прямі a і b паралельні, якщо будь-яка пряма, що перетинає пряму a, перетинає і пряму b. Доведіть.

www.e-ranok.com.ua

524. Точки A і B лежать по один бік від прямої a на рівних відстанях від неї. Доведіть, що $AB \parallel a$.

525. Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці O й діляться нею у відношенні $AO : OB = CO : OD$. Прямі AD і BC перетинаються в точці M. Доведіть, що трикутник DMB є рівнобедреним.

526. Один із кутів трикутника дорівнює α. Знайдіть кут між прямими, які містять висоти, проведені з вершин двох інших кутів.

527. Кут між висотою і бісектрисою, проведеними з вершини одного з кутів трикутника, дорівнює половині різниці двох інших кутів трикутника. Доведіть.

528. Медіана AM трикутника ABC перпендикулярна до його бісектриси BL. Знайдіть BC, якщо $AB = 3$ см.

529. Перпендикуляр, проведений із вершини A трикутника ABC до медіани BM, ділить цю медіану навпіл. Знайдіть AB, якщо $AC = 10$ см.

530. Через вершини A і C трикутника ABC проведено прямі, які є перпендикулярними до бісектриси кута ABC та перетинають промені BC і BA в точках K і M відповідно. Знайдіть довжину сторони AB, якщо $AM = 2$ см, $BC = 7$ см. Скільки розв'язків має задача?

531. У трикутнику ABC $AB < BC < AC$. Один із кутів трикутника вдвічі менший за другий і на $100°$ менший, ніж третій. Знайдіть кут B.

532. Доведіть, що відстань між будь-якими двома точками, які лежать на сторонах трикутника, не більша, ніж найбільша з його сторін.

533. Визначте, скільки трикутників можна скласти з відрізків завдовжки:

а) 2, 3, 4, 5;

б) 2, 3, 4, 5, 6, 7.

www.e-ranok.com.ua

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Аксіоми Евкліда. Аксіоми, сформульовані Евклідом, лягли в основу сучасної геометрії. Учені протягом більш як двох тисяч років досліджували, чи можна довести деякі з евклідових постулатів (аксіом), спираючись на інші. Особливу увагу привертала аксіома паралельних прямих (аксіома Евкліда). Серед видатних геометрів давнини не було, мабуть, жодного, хто б не спробував довести її як теорему. І тільки на початку XIX ст. російський математик Микола Іванович Лобачевський (1792—1856) довів, що цю аксіому неможливо вивести з інших аксіом.



Афінська школа (італ. *Scuola di Atene*) — фреска роботи Рафаеля у Ватиканському палаці.

www.e-ranok.com.ua

Неевклідова геометрія. Лобачевський створив іншу, неевклідову геометрію. За Лобачевським пряма, яка паралельна даній прямій і проходить через дану точку поза нею, не єдина. Більшість сучасників це відкриття не прийняли. Така сама доля спіткала й роботи інших науковців, які одержали аналогічні результати: угорця Яноша Больяї (1802–1860) та німця Карла Гауса (1777–1855). Лише через століття неевклідову геометрію визнали й оцінили як видатне наукове відкриття.



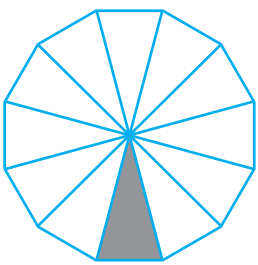
М. І. Лобачевський

Становлення геометричної аксіоматики. У XX ст. дослідження питань аксіоматичної побудови геометрії вийшли на якісно новий рівень. Німецький математик Давід Гільберт (1862—1943) узагальнив і вдосконалив систему евклідових аксіом. Авторський варіант геометричних аксіом, розроблений на основі праць Евкліда й Гільберта, запропонував наш співвітчизник Олексій Васильович Погорєлов (1919—2002).



Давід Гільберт

Геометрія трикутників. Евклід ввів поняття про рівність геометричних фігур, які суміщаються накладанням. У дослідженнях давньогрецьких геометрів багато задач і теорем зводилося до доведення рівності трикутників (доведення другої ознаки рівності трикутників приписують Фалесові). Греки знали і теорему про суму кутів трикутника (вона вперше зустрічається в коментарях Прокла до «Начал» Евкліда).



Геометрія трикутника стала основою для вивчення складніших видів многокутників, які можна розбити на трикутники.

www.e-ranok.com.ua

Тематика повідомлень і рефератів до розділу II

1. Евклід Александрійський — засновник сучасної геометрії.
2. М. І. Лобачевський — реформатор геометричної науки.
3. Ознаки рівності для різних видів трикутників. Прикладні задачі, пов'язані з рівністю трикутників.
4. Нерівності в трикутнику та їхні наслідки. Найкоротші шляхи на площині.
5. Доведення і спростування. Логічні основи теорії аргументації.
6. Поділ і класифікація понять.

Рекомендовані джерела інформації

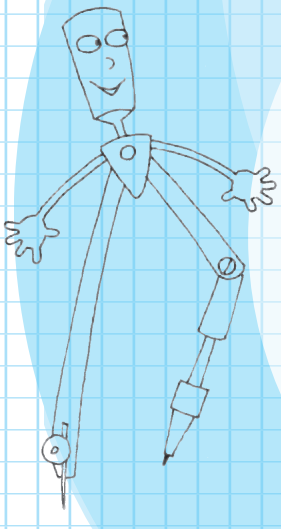
1. Бевз Г. П. Геометрія трикутника. — К. : Генеза, 2005.
2. Гетманова А. Д. Логика. — М. : Дрофа, 1995.
3. Глейзер Г. И. История математики в школе. VII–VIII кл. — М. : Просвещение, 1982.
4. Інтернет-бібліотека МЦНМО : http://www.mccme.ru/free-books/
5. Кушнір І. А. Трикутник і тетраедр в задачах. — К. : Рад. шк., 1991.
6. Математична хрестоматія. Т. 1, 2. — К. : Рад. шк., 1970.
7. Холодковський В. Микола Іванович Лобачевський. — К. : Рад. шк., 1950.
8. Шарыгин И. Ф. Геометрия 7–9. — М. : Дрофа, 1997.

Відеоматеріали за розділом II

www.e-ranok.com.ua

Розділ III

Коло і круг. Геометричні побудови



§ 19. Коло і круг

§ 20. Дотична до кола, її властивість та ознака

§ 21. Задача на побудову та її розв'язування. Основні задачі на побудову

§ 22. Геометричне місце точок

§ 23. Описане і вписане кола трикутника

www.e-ranok.com.ua

Нехай у природі не існувало б жодного круга або трикутника, і все-таки істини, доведені Евклідом, назавжди зберегли б свою вірогідність і очевидність.

Девід Юм,
англійський філософ

У попередніх розділах ви знайомилися з основними геометричними фігурами, з'ясовували особливості цих фігур та їхнє взаємне розміщення. Але на практиці досить часто доводиться розв'язувати «обернену» задачу — за певними особливостями знаходити фігуру, яка їх має. Саме таким є зміст задач на побудову, що розглядатимуться в цьому розділі.

Ще в роботах давньогрецьких математиків описано задачі на побудову й методи їх розв'язування. Багато з цих задач становлять класику евклідової геометрії. Крім практичної цінності, вони вельми важливі з дослідницького погляду, адже в ході їх розв'язування визначаються нові особливості побудованих фігур.

www.e-ranok.com.ua

§19 Коло і круг

19.1. Означення кола та його елементів

Нехай на площині позначено точку O. Спробуємо визначити, де розміщуються всі точки, віддалені від точки O на однакову відстань R (рис. 162). Очевидно, що від точки O можна відкласти безліч відрізків із довжиною R. Кінці всіх таких відрізків на площині утворюють коло — фігуру, уже відому з курсу математики.

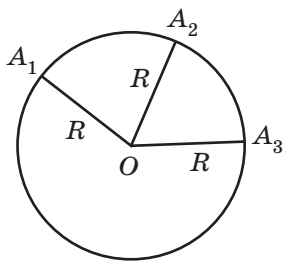


Рис. 162. Розміщення точок площини, віддалених від точки O на відстань R

Означення

Колом називається геометрична фігура, що складається з усіх точок площини, віддалених від даної точки (**центра кола**) на однакову відстань.

Інакше кажуть, що всі точки кола рівновіддалені від його центра.

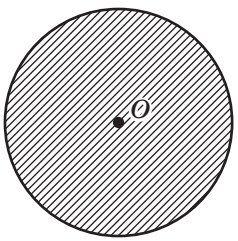


Рис. 163. Коло і круг

Означення

Кругом називається частина площини, яка обмежена колом і містить його центр.

Інакше кажучи, круг складається з усіх точок площини, віддалених від даної точки (**центра круга**) на відстань, що не перевищує заданої.

На рис. 163 заштриховано частину площини — круг, обмежений колом із тим самим центром. Зауважимо, що центр кола й круга є точкою круга, але не є точкою кола.

Означення

Радіусом кола (круга) називається відстань від центра кола до будь-якої точки кола.

Радіус — від латинського «радіус» — промінь, спиця.

Хорда — від грецького «хорде» — струна, тятива.

Діаметр — від грецького «діа» — наскрізь і «метрео» — вимірюю — вимірюваний наскрізь; інше значення цього слова — поперечник

www.e-ranok.com.ua

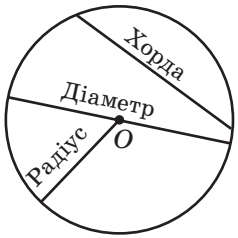


Рис. 164. Хорда, радіус і діаметр кола

Радіусом також називається будь-який відрізок, що сполучає точку кола з його центром. На рис. 162 $OA_1, OA_2, \ldots$ — радіуси кола з центром O. Як правило, радіус позначається літерою R (або r).

Означення

Хордою називається відрізок, що сполучає дві точки кола.
Діаметром називається хорда, яка проходить через центр кола.

На рис. 164 зображено дві хорди кола, одна з яких є його діаметром. Зазвичай діаметр позначають літерою d. Очевидно, що діаметр удвічі більший за радіус, тобто $d = 2R$.

Коло креслять за допомогою циркуля.

19.2. Властивість діаметра, перпендикулярного до хорди

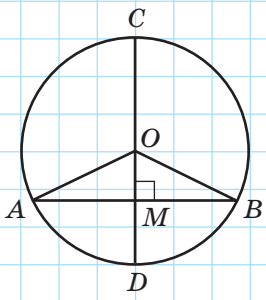


Рис. 165

Опорна задача

Діаметр, перпендикулярний до хорди, проходить через її середину. Доведіть.

Розв'язання

Нехай CD — діаметр кола з центром O, AB — хорда цього кола, $AB \perp CD$. Доведемо, що M — точка перетину відрізків AB і CD — середина відрізка AB.

У випадку, коли хорда AB сама є діаметром, точка M збігається з центром O і твердження задачі є очевидним. Нехай хорда AB не є діаметром (рис. 165). Проведемо радіуси OA і OB.

Тоді в рівнобедреному трикутнику AOB висота OM є медіаною. Отже, $AM = BM$, що й треба було довести.

Доведіть самостійно ще одне твердження **(опорне):**

діаметр кола, проведений через середину хорди, яка не є діаметром, перпендикулярний до цієї хорди.

www.e-ranok.com.ua

Запитання й задачі

Усні вправи

534. Дано коло радіуса R із центром O і точку A. Порівняйте R із довжиною відрізка OA, якщо точка A:

а) лежить на даному колі;

б) лежить усередині круга, обмеженого даним колом;

в) не належить кругу, обмеженому даним колом.

535. Скільки спільних точок із колом має:

а) промінь, початком якого є центр кола;

б) пряма, що проходить через центр кола?

536. Точка перетину двох діаметрів кола сполучена з точкою кола. Яку довжину має отриманий відрізок, якщо діаметр кола дорівнює d?

537. Дві хорди кола мають спільний кінець. Чи можуть обидві вони бути діаметрами?

Графічні вправи

538. Накресліть коло з центром O радіуса 3 см.

а) Проведіть у цьому колі радіус, діаметр і хорду, яка не є діаметром. Який із цих відрізків не проходить через центр кола?

б) Виділіть на рисунку відрізок, довжина якого дорівнює 6 см.

в) Позначте всередині кола точку, яка не збігається з точкою O. Скільки радіусів, діаметрів, хорд можна провести через позначену точку?

539. Накресліть коло. Зітріть зображення центра кола й виріжте круг із паперу. За допомогою згинань отриманого шаблона відновіть центр кола.

Письмові вправи

Рівень А

540. Знайдіть діаметр кола, якщо він на 8 см більший, ніж радіус цього кола.

541. Діаметр циферблата годинника дорівнює 11 см. Знайдіть довжину хвилинної стрілки.

www.e-ranok.com.ua

542. Відрізки AC і BD — діаметри кола з центром O.
а) Доведіть рівність трикутників AOB і COD.
б) Знайдіть периметр трикутника COD, якщо $AC = 14$ см, $AB = 8$ см.

543. Відрізки OA і OB — радіуси кола з центром O, причому $\angle AOB = 60°$. Знайдіть периметр трикутника AOB, якщо $AB = 5$ см.

Рівень Б

544. З однієї точки кола проведено діаметр і хорду, яка дорівнює радіусу кола. Знайдіть кут між ними.

545. З однієї точки кола проведено дві хорди, які дорівнюють радіусу кола. Знайдіть кут між ними.

546. На рис. 166 відрізки AB і CD — рівні хорди кола з центром O. Доведіть рівність кутів AOC і BOD.

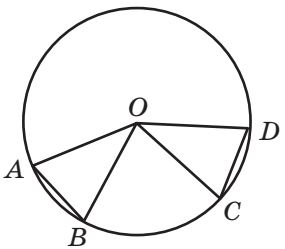


Рис. 166

547. Відрізок AB — діаметр кола з центром O, AC і CB — рівні хорди цього кола. Знайдіть кут COB.

548. Доведіть, що рівні хорди кола рівновіддалені від його центра.

549. Сформулюйте й доведіть твердження, обернене до твердження задачі 548.

550. Доведіть, що діаметр є найбільшою хордою кола.

Рівень В

551. Якщо одна з двох перпендикулярних хорд точкою перетину ділиться навпіл, то друга хорда є діаметром кола. Доведіть.

552. Відстань від центра кола O до хорди AB вдвічі менша, ніж радіус кола. Знайдіть кут AOB.

553. Відстань від центра кола O до хорди AB вдвічі менша, ніж хорда AB. Знайдіть кут AOB.

554. Дві хорди кола взаємно перпендикулярні. Доведіть, що відстань від центра кола до точки їхнього перетину дорівнює відстані між серединами цих хорд.

555. Хорди, що перетинають діаметр у точках, які ділять ці хорди навпіл, паралельні. Доведіть.

www.e-ranok.com.ua

Повторення перед вивченням § 20

Теоретичний матеріал

- існування і єдиність перпендикуляра до прямої
- медіана, бісектриса й висота рівнобедреного трикутника
- сума кутів трикутника
- властивості й ознаки

п. 9.1; 12.2

п. 16.1; 13.2

Задачі

556. Доведіть, що прямі a і b, перпендикулярні до паралельних прямих c і d, відтинають на цих прямих рівні відрізки.

557. У трикутнику ABC $\angle B = 130^\circ$, AD — висота трикутника. Знайдіть кути трикутника ABD.

www.e-ranok.com.ua

§20 Дотична до кола, її властивість та ознака

20.1. Означення та властивість дотичної

Будь-яка пряма, що проходить через точки кола, називається **січною**; її відрізок, який лежить усередині кола,— це хорда. На рис. 167 хорда CD — відрізок січної b. Розглянемо тепер пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку.

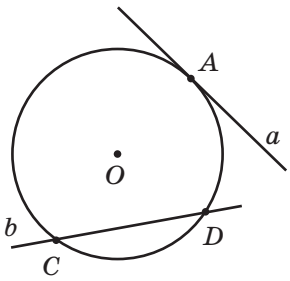


Рис. 167. Січна й дотична до кола

Означення

Дотичною до кола називається пряма, яка має з колом єдину спільну точку.

Спільна точка дотичної і кола називається **точкою дотику.** На рис. 167 пряма a є дотичною до кола з центром O. Інакше кажуть так: пряма a дотикається до кола з центром O у точці A.

Визначимо взаємне розміщення дотичної і радіуса кола, проведеного в точку дотику.

Теорема (властивість дотичної)

Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

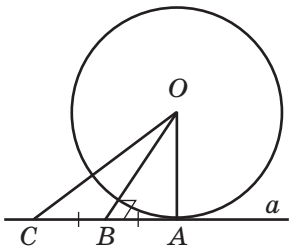


Рис. 168. До доведення властивості дотичної

Доведення

□ Нехай пряма a дотикається до кола з центром O в точці A (рис. 168). Доведемо, що $OA \perp a$. Застосуємо метод доведення від супротивного.

Нехай відрізок OA не є перпендикуляром до прямої a. Тоді, за теоремою про існування і єдиність перпендикуляра до прямої, з точки O можна провести перпендикуляр OB до прямої a.

www.e-ranok.com.ua

На промені AB від точки B відкладемо відрізок BC, що дорівнює AB, і сполучимо точки O і C. Оскільки за побудовою відрізок OB — медіана й висота трикутника AOC, то цей трикутник рівнобедрений з основою AC, тобто $OA = OC$. Таким чином, відстань між точками O і C дорівнює радіусу кола, і за означенням радіуса точка C має лежати на цьому колі. Але це суперечить означенню дотичної, оскільки A — єдина спільна точка кола з прямою a. Із цієї суперечності випливає, що наше припущення хибне, тобто $OA \perp a$. Теорему доведено. ■

20.2. Ознака дотичної

Доведемо теорему, обернену до попередньої.

Теорема (ознака дотичної)

Якщо пряма проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку, то вона є дотичною до кола.

Доведення

□ Нехай пряма a проходить через точку A, що лежить на колі з центром O, причому $OA \perp a$. Доведемо, що a — дотична до кола. Згідно з означенням дотичної необхідно довести, що коло має з прямою a єдину спільну точку. Знову застосуємо метод доведення від супротивного.

Нехай пряма a має з колом спільну точку B, відмінну від A (рис. 169). Тоді за означенням кола $OA = OB$ як радіуси, тобто трикутник AOB є рівнобедреним з основою AB. За властивістю кутів рівнобедреного трикутника $\angle OBA = \angle OAB = 90^\circ$, що суперечить теоремі про суму кутів трикутника.

Таким чином, точка A — єдина спільна точка кола і прямої a, отже, пряма a — дотична до кола. Теорему доведено. ■

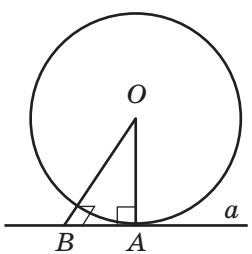


Рис. 169. До доведення ознаки дотичної

www.e-ranok.com.ua

20.3. Властивість відрізків дотичних

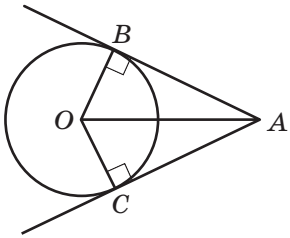


Рис. 170. Відрізки дотичних, проведених до кола з точки A

Нехай дано коло з центром O і точку A, яка не належить кругу, обмеженому даним колом (рис. 170).

Через точку A можна провести дві дотичні до даного кола. Відрізки, що сполучають дану точку A з точками дотику, називають **відрізками дотичних**, проведених із точки A до даного кола. На рис. 170 AB і AC — відрізки дотичних, проведених до кола з точки A.

Опорна задача

Відрізки дотичних, проведених із даної точки до кола, рівні. Доведіть.

Розв'язання

Нехай AB і AC — відрізки дотичних, проведених до кола з центром O з точки A (рис. 170). Розглянемо трикутники AOB і AOC. За властивістю дотичної $OB \perp AB$, $OC \perp AC$, тобто ці трикутники є прямокутними зі спільною гіпотенузою AO й рівними катетами ($OB = OC$ як радіуси кола). Отже, $\triangle AOB = \triangle AOC$ за гіпотенузою й катетом, звідки $AB = AC$.

20.4*. Дотик двох кіл

Означення

Два кола, що мають спільну точку, **дотикаються** в цій точці, якщо вони мають у ній спільну дотичну.

Спільна точка двох кіл у такому випадку називається **точкою дотику кіл.**

www.e-ranok.com.ua

Розрізняють два види дотику кіл: внутрішній і зовнішній.

Дотик кіл називається **внутрішнім**, якщо центри кіл лежать по один бік від спільної дотичної, проведеної через точку дотику (рис. 171, *а*).

Дотик кіл називається **зовнішнім**, якщо центри кіл лежать по різні боки від спільної дотичної, проведеної через точку дотику (рис. 171, *б*).

За властивістю дотичної радіуси таких кіл, проведені в точку дотику, перпендикулярні до спільної дотичної. З теореми про існування і єдиність прямої, перпендикулярної до даної, випливає, що центри дотичних кіл і точка дотику кіл лежать на одній прямій.

Кола, що дотикаються, мають єдину спільну точку — точку дотику.

Якщо такі кола мають радіуси R і r $(R > r)$, то відстань між центрами кіл дорівнює $R - r$ у випадку внутрішнього дотику і $R + r$ у випадку зовнішнього дотику.

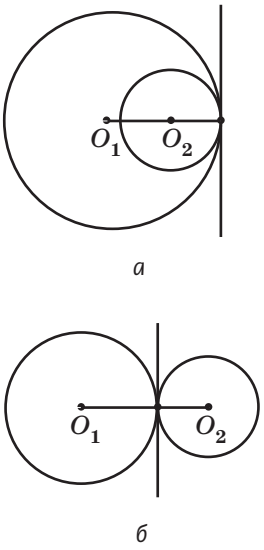


Рис. 171. Дотик двох кіл:
а) внутрішній;
б) зовнішній

Запитання й задачі

Усні вправи

558. Пряма AB дотикається до кола з центром O в точці A. Чи може трикутник OAB мати тупий кут?

559. Скільки дотичних до даного кола можна провести через точку, що лежить:

а) на цьому колі;

б) усередині круга, обмеженого цим колом?

560. Відрізки AB і AC — відрізки дотичних, проведених із точки A до даного кола. Визначте вид трикутника ABC.

www.e-ranok.com.ua

561. Відстань між центрами двох кіл, що дотикаються і мають радіуси R_1 і R_2, дорівнює d. Визначте, яким є дотик цих кіл (внутрішнім чи зовнішнім), якщо:

а) $R_1 = 8$ см, $R_2 = 2$ см, $d = 6$ см;

б) $R_1 = 3$ см, $R_2 = 6$ см, $d = 9$ см.

Графічні вправи

562. Накресліть коло з центром O і позначте на ньому точку A.

а) За допомогою косинця проведіть через точку A дотичну до цього кола. Яка теорема при цьому використовується?

б) Проведіть хорду AB, яка не є діаметром. Проведіть дотичну до кола в точці B. Позначте точку C — точку перетину двох дотичних — і порівняйте довжини відрізків AC і BC.

563. Накресліть коло з центром O радіуса 2,5 см.

а) Позначте на колі точку A й накресліть коло з центром K і радіусом 1,5 см, що зовні дотикається до цього кола в точці A.

б) Проведіть спільну дотичну побудованих кіл. Під яким кутом вона перетинає пряму OK?

Письмові вправи

Рівень А

564. Пряма AB дотикається до кола з центром O в точці A. Знайдіть:

а) кут OBA, якщо $\angle AOB = 20°$;

б) радіус кола, якщо $\angle AOB = 45°$, $AB = 8$ см.

565. Пряма AB дотикається до кола з центром O в точці A. Знайдіть кути OBA і AOB, якщо $OA = AB$.

566. Через точку кола проведено дотичну й хорду, яка дорівнює радіусу кола. Знайдіть кут між ними.

567. У колі з центром O проведено хорду AB, причому $\angle AOB = 120°$. Знайдіть кут між цією хордою і дотичною, проведеною до кола в точці B.

568. На рис. 170 $\angle BOC = 150°$. Знайдіть кут BAC.

569. На рис. 170 $\angle BAC = 50°$. Знайдіть кут BOC.

www.e-ranok.com.ua

570. Радіуси двох кіл, що дотикаються, дорівнюють 14 см і 11 см. Знайдіть відстані між центрами кіл у випадках внутрішнього і зовнішнього дотику.

Рівень Б

571. Доведіть, що прямі, які дотикаються до кола в кінцях його діаметра, паралельні.

572. Радіус, проведений у точку дотику кола з прямою a, ділить навпіл хорду AB. Доведіть, що $AB \parallel a$.

573. Коло дотикається до сторін нерозгорнутого кута. Доведіть, що центр кола лежить на бісектрисі кута.

574. Через кінці хорди AB, яка дорівнює радіусу кола, проведено дотичні, які перетинаються в точці C. Знайдіть кут ACB.

575. Прямі AB і AC дотикаються до кола з центром O в точках B і C. Знайдіть кут BAC, якщо $\angle OBC = 40^\circ$.

576. Два кола, відстань між центрами яких дорівнює 8 см, дотикаються внутрішньо. Радіус одного з кіл дорівнює 10 см. Яку довжину може мати радіус другого кола?

577. Два кола, відстань між центрами яких дорівнює 8 см, дотикаються зовнішньо. Знайдіть діаметри цих кіл, якщо їхня різниця дорівнює 4 см.

Рівень В

578. Доведіть, що:

а) три дотичні до одного кола не можуть перетинатися в одній точці;

б) пряма не може перетинати коло більш ніж у двох точках.

579. Прямі AB і AC дотикаються до кола з центром O в точках B і C. Знайдіть радіус кола, якщо $\angle BOC = 120^\circ$, $AO = 30$ см.

580. Прямі AB і AC дотикаються до кола з центром O в точках B і C. Знайдіть відстань AO, якщо $AB = 7$ см, $\angle ABC = 30^\circ$.

581. Дано два кола. Знайдіть радіус третього кола, що дотикається до двох даних і має центр на прямій, яка проходить через їхні центри, якщо радіуси даних кіл і відстань між їхніми центрами дорівнюють відповідно:

а) 5, 2 і 1;

б) 3, 4 і 5.

Для кожного випадку знайдіть усі можливі розв'язки.

www.e-ranok.com.ua

Повторення перед вивченням § 21

Теоретичний матеріал

- вимірювання відрізків
- вимірювання кутів
- нерівність трикутника

п. 2.3; 3.3

п. 18.2

Задачі

582. Доведіть, що в рівносторонньому трикутнику:

а) будь-які дві медіани перетинаються під кутом $60°$;

б) відстані від вершин до прямих, що містять протилежні сторони, рівні.

583. Пряма l перетинає відрізок AB у його середині. Доведіть, що відстані від точок A і B до прямої l рівні.

www.e-ranok.com.ua

§ 21* Задача на побудову та її розв'язування. Основні задачі на побудову

21.1. Що таке задача на побудову?

Задачі на побудову являють собою окремий клас геометричних задач, розв'язування яких підпорядковується певним правилам.

Мета розв'язування цих задач — побудова геометричних фігур із заданими властивостями за допомогою креслярських інструментів. Якщо в умові задачі немає спеціальних приміток, то маються на увазі побудови за допомогою циркуля й лінійки без вимірювальних поділок.

Циркуль — від латинського «циркулус» — коло, круг

За допомогою ***лінійки*** можна провести:

- довільну пряму;
- пряму, що проходить через дану точку;
- пряму, що проходить через дві дані точки.

Зауважимо, що ніяких інших побудов лінійкою виконувати не можна. Зокрема, за допомогою лінійки не можна відкладати відрізки заданої довжини.

За допомогою ***циркуля*** можна:

- провести коло (частину кола) довільного або заданого радіуса з довільним або заданим центром;
- відкласти від початку даного променя відрізок заданої довжини.

Крім того, можна позначати на площині точки й знаходити точки перетину прямих і кіл.

Усі щойно перелічені операції називають **елементарними побудовами**, а розв'язати задачу на побудову — це означає знайти послідовність елементарних побудов, після виконання яких шукана фігура вважається побудованою, і довести, що саме ця фігура задовольняє умову задачі.

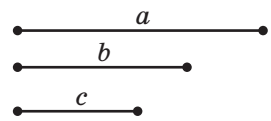
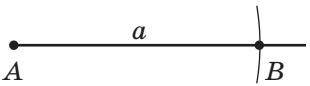
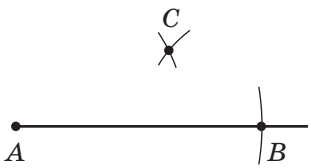
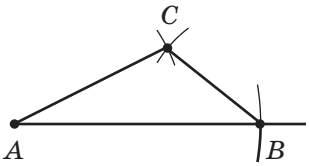


www.e-ranok.com.ua

Таким чином, розв'язування задач на побудову полягає не стільки в самій побудові фігури, скільки в знаходженні способу її побудови й доведенні того, що отримана фігура справді є шуканою.

21.2. Основні задачі на побудову

Якщо кожний крок побудов описувати повністю, розв'язання деяких задач може виявитися громіздким. З метою спрощення роботи виділяють кілька найважливіших задач, які вважаються основними й не деталізуються щоразу в ході розв'язування складніших задач.

ПОБУДОВА ТРИКУТНИКА ЗА ДАНИМИ СТОРОНАМИ	
	Нехай дано відрізки завдовжки a, b і c. Побудуємо трикутник зі сторонами a, b і c.
	Проведемо довільний промінь і позначимо на ньому точку A. Розхилом циркуля, що дорівнює a, побудуємо коло з центром A. Нехай B — точка перетину цього кола з променем.
	Розхилом циркуля, що дорівнює b, опишемо коло з центром A, а розхилом циркуля, що дорівнює c, — коло з центром B. Нехай C — точка перетину цих кіл.
	Проведемо відрізки AC і BC. За побудовою трикутник ABC має сторони завдовжки a, b і c, тобто трикутник ABC є шуканим[1].

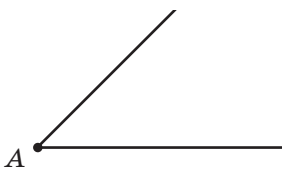
[1] За даними задачі можна побудувати чотири різні трикутники зі спільною стороною AB. За третьою ознакою ці трикутники рівні, тобто суміщаються накладанням. У таких випадках розв'язком задачі вважають будь-який із цих рівних трикутників.

www.e-ranok.com.ua

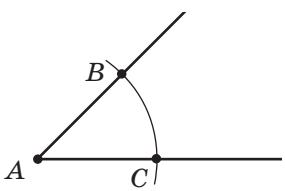
Зауважимо, що ця задача має розв'язок за умови, що довжини відрізків a, b і c задовольняють нерівність трикутника.

За допомогою описаних операцій нескладно розв'язати задачу ***про побудову кута, що дорівнює даному нерозгорнутому куту*** A. Для цього достатньо відкласти на сторонах даного кута A відрізки AB і AC та побудувати трикутник, що дорівнює трикутнику ABC.

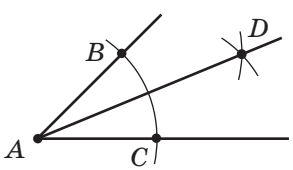
ПОБУДОВА БІСЕКТРИСИ КУТА



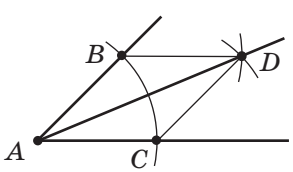
Нехай дано нерозгорнутий кут із вершиною A. Побудуємо його бісектрису.



За допомогою циркуля побудуємо коло довільного радіуса з центром A. Нехай B і C — точки перетину цього кола зі сторонами даного кута.



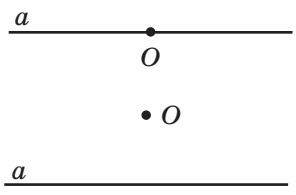
Побудуємо кола того самого радіуса з центрами B і C. Нехай D — точка перетину цих кіл.



Проведемо промінь AD. За побудовою $\triangle ABD = \triangle ACD$ (за третьою ознакою). Звідси $\angle BAD = \angle CAD$, тобто AD — бісектриса даного кута A.

www.e-ranok.com.ua

ПОБУДОВА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЇ ПРЯМОЇ

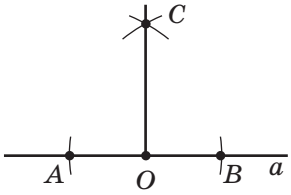


Нехай дано пряму a і точку O. Побудуємо пряму, що проходить через точку O і перпендикулярна до прямої a. Розглянемо два випадки.

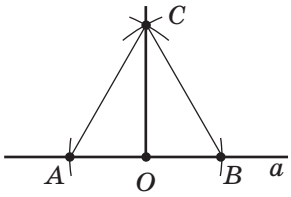
Точка O лежить на прямій a



Побудуємо коло довільного радіуса з центром O. Нехай A і B — точки перетину цього кола з прямою a.

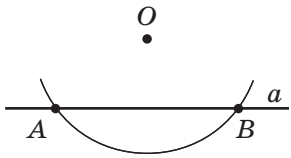


Побудуємо кола радіуса AB з центрами A і B. Нехай C — одна з точок їхнього перетину. Проведемо пряму через точки C і O.



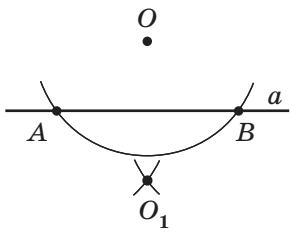
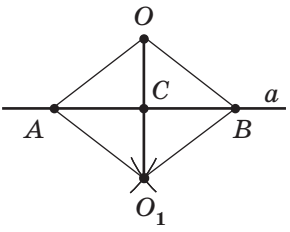
За побудовою відрізок CO — медіана рівностороннього трикутника ABC, яка є також його висотою. Отже, $CO \perp AB$, тобто пряма CO шукана.

Точка O не лежить на прямій a



Побудуємо коло з центром O, що перетинає пряму a в точках A і B.

www.e-ranok.com.ua

	Побудуємо кола того самого радіуса з центрами A і B. Нехай O_1 — точка перетину цих кіл, причому точки O і O_1 лежать по різні боки від прямої a.
	Проведемо пряму OO_1. Нехай C — точка перетину прямих OO_1 і a. За побудовою $\triangle AOO_1 = \triangle BOO_1$ (за третьою ознакою). Звідси $\angle AOC = \angle BOC$. Тоді OC — бісектриса рівнобедреного трикутника AOB, проведена до основи. Вона також є медіаною й висотою трикутника. Отже, $OC \perp a$, тобто пряма OO_1 шукана.

Зауважимо, що побудована пряма OO_1 перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину. Таку пряму називають **серединним перпендикуляром до відрізка**.

Користуючись описаними побудовами, нескладно розв'язувати задачі ***про побудову середини даного відрізка й про побудову прямої, паралельної даній.***

Для побудови середини відрізка AB достатньо провести два кола радіуса AB з центрами в точках A і B (рис. 172). Позначивши точки перетину цих кіл через O і O_1, можна визначити середину відрізка AB як точку перетину прямих AB і OO_1, після чого провести доведення аналогічно попередній задачі.

Для побудови прямої, що проходить через дану точку O паралельно даній прямій a, достатньо провести через точку O пряму b, перпендикулярну до a, і пряму c, перпендикулярну до b (рис. 173). Тоді $a \parallel c$ за теоремою про дві прямі, перпендикулярні до третьої.

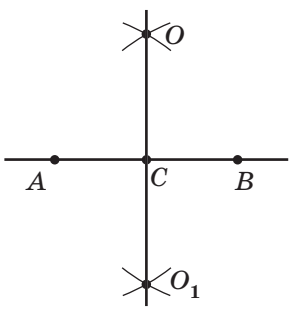


Рис. 172. Побудова середини відрізка

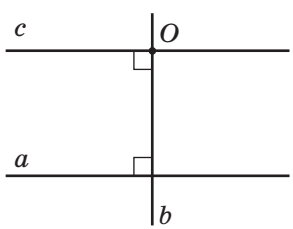


Рис. 173. Побудова прямої, паралельної даній

www.e-ranok.com.ua

Таким чином, ***основними задачами на побудову*** вважатимемо такі:

1) побудова трикутника за даними сторонами;
2) побудова кута, що дорівнює даному нерозгорнутому куту;
3) побудова бісектриси даного нерозгорнутого кута;
4) побудова прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даної прямої;
5) побудова серединного перпендикуляра до даного відрізка;
6) побудова середини даного відрізка;
7) побудова прямої, що проходить через дану точку паралельно даній прямій.

Якщо ці задачі застосовуються як допоміжні під час розв'язування складніших задач, можна докладно не описувати відповідних побудов.

21.3. Розв'язування задач на побудову

Розв'язування задач на побудову складається з чотирьох основних етапів: ***аналіз, побудова, доведення, дослідження***.

ЗАГАЛЬНА СХЕМА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ		
1	*Аналіз*	Виконання рисунка-ескіза шуканої фігури та встановлення зв'язку між її елементами і даними задачі. Визначення плану побудови шуканої фігури.
2	*Побудова*	Здійснення плану, розробленого в ході аналізу.
3	*Доведення*	Обґрунтування того, що побудована фігура має задану форму, а розміри та розміщення її елементів задовольняють умову задачі.
4	*Дослідження*[1]	Визначення кількості розв'язків і умов існування шуканої фігури або обґрунтування неможливості її побудови.

Якщо задача є доволі простою, то окремі етапи її розв'язування можна проводити усно.

[1] У деяких задачах для дослідження необхідні геометричні твердження та співвідношення, що вивчаються у 8–9 класах. У цих випадках ми будемо скорочувати дослідження або взагалі опускатимемо його.

www.e-ranok.com.ua

Розглянемо на конкретному прикладі хід розв'язування задач на побудову.

Задача

Побудуйте трикутник за двома сторонами й медіаною, проведеною до однієї з них.

Розв'язання

Нехай a, b, m_b — дві сторони й медіана трикутника ABC, який необхідно побудувати (рис. 174).

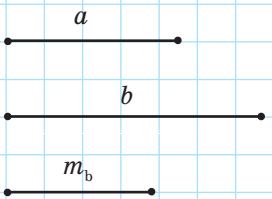


Рис. 174

Аналіз

Припустимо, що трикутник ABC побудовано (рис. 175). Якщо BM — дана медіана трикутника ABC, то в трикутнику ABM відомі довжини трьох сторін ($AB = a$, $BM = m_b$, $AM = \frac{b}{2}$ за умовою задачі). Таким чином, ми можемо побудувати трикутник ABM і знайти вершини A і B шуканого трикутника. Щоб знайти вершину C, достатньо відкласти на промені AM відрізок MC завдовжки $\frac{b}{2}$.

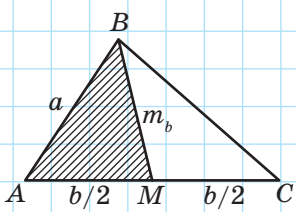


Рис. 175

Побудова

1. Розділимо відрізок b навпіл.
2. Побудуємо трикутник ABM зі сторонами $AB = a$, $BM = m_b$, $AM = \frac{b}{2}$.
3. Відкладемо на промені AM відрізок $MC = \frac{b}{2}$.
4. Сполучимо точки B і C.

Доведення

У трикутнику ABC $AB = a$, $AC = b$, $BM = m_b$, BM — медіана (за побудовою). Отже, трикутник ABC є шуканим.

Дослідження

Задача має розв'язок за умови існування трикутника ABM, тобто якщо числа a, m_b, $\frac{b}{2}$ задовольняють нерівність трикутника.

www.e-ranok.com.ua

Порівняємо щойно розв'язану задачу із задачею про доведення рівності трикутників за двома сторонами й медіаною, проведеною до однієї з них (п. 13.1). Розв'язуючи обидві ці задачі, ми використали трикутник ABM, у якому всі сторони відомі з умови. Його розгляд допоміг у задачі на доведення отримати необхідні співвідношення для кутів даних трикутників, а в задачі на побудову — знайти дві вершини шуканого трикутника. Трикутник ABM називають ***допоміжним***, а відповідний метод розв'язування — ***методом допоміжного трикутника***.

Розв'язування задач на побудову за допомогою методу допоміжного трикутника докладно розглянуте в додатку 2.

Запитання й задачі

Усні вправи

584. Опишіть, як поділити:

а) даний відрізок на чотири рівні відрізки;

б) даний кут у відношенні $1:3$.

585. Опишіть, як побудувати:

а) кут $45°$;

б) кут $135°$.

Графічні вправи

586. Розв'яжіть у зошиті або на екрані комп'ютера основні задачі на побудову. Виділіть напівжирними лініями вихідні дані задачі, пунктирними лініями — проміжні побудови, червоним кольором — результати розв'язування.

Письмові вправи

Рівень А

587. Дано відрізки a і b, причому $a<b$. Побудуйте відрізок завдовжки:

а) $3a$; б) $b-a$; в) $a+2b$.

www.e-ranok.com.ua

588. Дано гострі кути α і β, причому $\alpha < \beta$. Побудуйте кут із градусною мірою:

а) $0{,}5\beta$;

б) $\alpha + \beta$;

в) $2\beta - \alpha$.

589. Побудуйте трикутник ABC за такими даними:

а) $AB = 4$ см, $BC = 3$ см, $\angle B = 45°$;

б) $AB = 6$ см, $BC = 10$ см, $AC = 8$ см;

в) $AB = 3$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 70°$.

590. Побудуйте трикутник ABC за такими даними:

а) $AC = 5$ см, $AB = 3$ см, $\angle A = 60°$;

б) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $AC = 6$ см;

в) $BC = 4$ см, $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$.

591. Дано трикутник ABC. Побудуйте трикутник ABC_1, який дорівнює даному трикутнику.

592. Дано трикутник. Побудуйте всі його:

а) медіани;

б) бісектриси;

в) висоти, якщо даний трикутник гострокутний;

г) висоти, якщо даний трикутник тупокутний.

593. Побудуйте:

а) відрізок, який дорівнює відстані між двома даними паралельними прямими;

б) дотичну, що проходить через дану точку кола.

Рівень Б

594. Побудуйте кут $60°$.

595. Побудуйте кути $120°$ і $30°$.

596. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та периметром.

597. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та висотою, проведеною до основи.

598. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною та кутом при основі.

599. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою й гострим кутом.

www.e-ranok.com.ua

600. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і кутом, протилежним цьому катету.

601. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та кутом, протилежним основі.

Рівень В

602. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною й медіаною, проведеною до бічної сторони.

603. Побудуйте трикутник за двома сторонами й медіаною, проведеною до третьої сторони.

604. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і висотою, проведеною до цієї сторони.

605. Побудуйте трикутник за стороною, протилежним їй кутом і висотою, проведеною до однієї з двох інших сторін.

606. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і сумою двох інших сторін.

607. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і різницею двох інших сторін.

Повторення перед вивченням § 22

Теоретичний матеріал

- означення кола
- перпендикуляр до прямої
- бісектриса кута

п. 19.1

§ 9; п. 3.2

Задачі

608. На сторонах гострого кута O позначено точки A і B, причому $OA = OB$. Через ці точки проведено прямі, які перетинаються в точці C. Доведіть, що OC — бісектриса даного кута, якщо:

а) $AC \perp OA$, $BC \perp OB$;

б) $AC \perp OB$, $BC \perp OA$.

609. Знайдіть відстань між паралельними прямими, якщо від січної, що перетинає їх під кутом $30°$, вони відтинають відрізок завдовжки 22 см.

www.e-ranok.com.ua

§22 Геометричне місце точок

22.1. Поняття про геометричне місце точок

Дотепер ми описували геометричні фігури за допомогою означень і встановлювали їхні особливості шляхом доведення властивостей та ознак, які стосуються фігури в цілому. Для випадків, коли певну властивість і відповідну їй ознаку має кожна точка фігури, існує ще один спосіб опису.

Означення

Геометричним місцем точок (скорочено **ГМТ**) на площині називається фігура, що складається з усіх точок площини, які задовольняють певну умову.

Наприклад, за означенням **коло є геометричним місцем точок, віддалених від даної точки площини на однакову відстань.**

В означенні ГМТ звернемо увагу на слово «усіх». Воно вказує на те, що для з'ясування геометричного місця точок недостатньо довести, що точки деякої фігури задовольняють певну умову (тобто встановити властивість точок). Необхідно також показати, що інших точок, які задовольняють цю умову, на площині немає, тобто довести відповідну ознаку: якщо точка задовольняє зазначену умову, то вона належить цій фігурі.

Інакше кажучи, ***доведення того, що деяка фігура F є геометричним місцем точок, які задовольняють умову P, складається з доведення двох тверджень — прямого і оберненого*:**

1) ***якщо певна точка належить фігурі F, то вона задовольняє умову P*;**

2) ***якщо певна точка задовольняє умову P, то вона належить фігурі F.***

www.e-ranok.com.ua

22.2. Основні теореми про ГМТ

Часто геометричним місцем точок є пряма або частина прямої. Доведемо дві важливі теореми про ГМТ.

Теорема (про серединний перпендикуляр)

Серединний перпендикуляр до відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців даного відрізка.

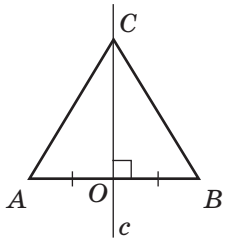


Рис. 176. Точка серединного перпендикуляра рівновіддалена від кінців відрізка

Доведення

□ Нам необхідно довести два твердження:

1) якщо точка належить серединному перпендикуляру до відрізка, то вона рівновіддалена від кінців цього відрізка;
2) якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона належить серединному перпендикуляру до цього відрізка.

Доведемо перше з цих тверджень.

Нехай точка C лежить на прямій c, яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину — точку O (рис. 176). У трикутнику ACB відрізок CO — медіана й висота, отже, цей трикутник рівнобедрений з основою AB. Звідси $AC = BC$, тобто відстані від точки C до кінців відрізка AB рівні. Випадок, коли точки C і O збігаються, розгляньте самостійно.

Доведемо друге твердження.

Нехай точка D рівновіддалена від точок A і B, тобто $AD = BD$ (рис. 177). Тоді в рівнобедреному трикутнику ADB відрізок DO — медіана, проведена до основи, яка є також і висотою. Таким чином, пряма DO — серединний перпендикуляр до відрізка AB. Випадок, коли точки D і O збігаються, розгляньте самостійно.

Теорему доведено. ■

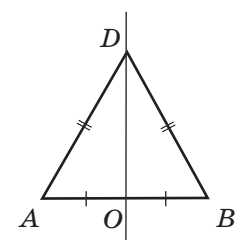


Рис. 177. Точка, рівновіддалена від кінців відрізка, належить серединному перпендикуляру

www.e-ranok.com.ua

Теорема (про бісектрису кута)

Бісектриса нерозгорнутого кута є геометричним місцем точок внутрішньої області кута, рівновіддалених від сторін цього кута[1].

Доведення

□ За аналогією з попередньою теоремою доведемо спочатку, що будь-яка точка бісектриси рівновіддалена від сторін кута.

Нехай дано нерозгорнутий кут із вершиною A і точку D на його бісектрисі (рис. 178). Проведемо з точки D перпендикуляри DB і DC до сторін даного кута. За означенням DB і DC — відстані від точки D до сторін кута A.

Прямокутні трикутники DBA і DCA мають спільну гіпотенузу DA, $\angle DAB = \angle DAC$ за умовою. Тоді $\triangle DBA = \triangle DCA$ за гіпотенузою й гострим кутом. Звідси $DB = DC$, тобто точка D рівновіддалена від сторін даного кута.

Тепер доведемо, що будь-яка точка, рівновіддалена від сторін кута, належить його бісектрисі. Нехай F — певна точка, рівновіддалена від сторін кута A, тобто перпендикуляри FB і FC, проведені з точки F до сторін цього кута, є рівними (рис. 179). Сполучимо точки F і A. Тоді прямокутні трикутники FBA і FCA рівні за гіпотенузою й катетом.

Звідси $\angle FAB = \angle FAC$, тобто промінь AF — бісектриса кута A.

Теорему доведено. ■

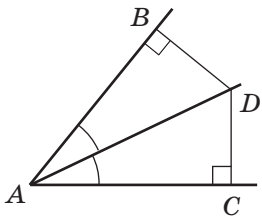


Рис. 178. Точка бісектриси кута рівновіддалена від його сторін

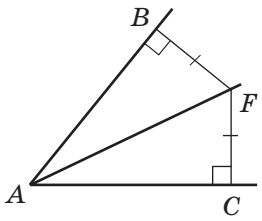


Рис. 179. Точка, рівновіддалена від сторін кута, належить його бісектрисі

[1] Тут і далі, кажучи про точки, рівновіддалені від сторін кута, ми маємо на увазі точки, що лежать у внутрішній області кута й рівновіддалені від прямих, які містять його сторони.

www.e-ranok.com.ua

22.3. *Метод геометричних місць*

Поняття ГМТ часто використовується під час розв'язування задач на побудову. Наприклад, нехай необхідно побудувати точку, що задовольняє умови P_1 і P_2. Якщо геометричним місцем точок, що задовольняють умову P_1, є фігура F_1, а геометричним місцем точок, що задовольняють умову P_2, — фігура F_2, то шукана точка буде спільною для фігур F_1 і F_2, тобто точкою їхнього перетину.

Міркування за такою схемою є основою ***методу геометричних місць.***

Задача

Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою й катетом.

Розв'язання

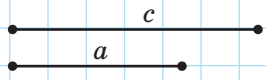


Рис. 180

Нехай у шуканому прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза AB дорівнює c, а катет BC дорівнює a (рис. 180).

Для побудови трикутника скористаємося методом геометричних місць. Для цього на стороні прямого кута C відкладемо катет BC, $BC = a$ (рис. 181). Точка A має належати другій стороні прямого кута й бути віддаленою від точки B на відстань c, тобто A — точка перетину кола з центром B радіуса c з другою стороною прямого кута. Побудовані точки A, B і C є вершинами шуканого прямокутного трикутника ABC. Згідно з наслідком з теореми про порівняння сторін і кутів трикутника, задача має розв'язок за умови $a < c$.

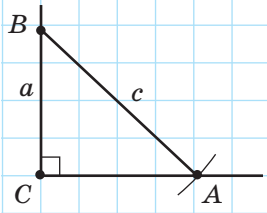


Рис. 181

www.e-ranok.com.ua

Запитання й задачі

Усні вправи

610. Фігура F — геометричне місце точок, що задовольняють умову P. Чи правильно, що:

а) на площині існують точки, що задовольняють умову P, але не належать фігурі F;

б) серед точок фігури F є точки, що не задовольняють умову P;

в) будь-яка точка, що задовольняє умову P, належить фігурі F?

611. Чи можна круг радіуса 5 см вважати геометричним місцем точок, віддалених від центра цього круга на відстань:

а) 5 см;

б) не більшу за 5 см;

в) не меншу за 5 см;

г) не більшу за 4 см?

612. Відрізок AB дорівнює 4 см. Чи можна вважати серединний перпендикуляр до цього відрізка геометричним місцем точок, які:

а) віддалені від точок A і B на 2 см;

б) віддалені від точок A і B на однакові відстані;

в) є вершинами рівнобедрених трикутників з основою AB?

613. Промінь BD — бісектриса кута ABC. Чи можна вважати його геометричним місцем точок, які рівновіддалені:

а) від променів BA і BC;

а) від прямих BA і BC?

Графічні вправи

614. Накресліть трикутник ABC.

а) Побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від вершин A і B.

б) Побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін AC і AB.

в) Позначте точку перетину побудованих геометричних місць і опишіть її властивості.

www.e-ranok.com.ua

615. Накресліть коло з центром O і проведіть хорду AB, яка не є діаметром.

а) Побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від точок A і B. Чи проходить побудована пряма через точку O? Чому?

б) Побудуйте геометричне місце точок кола, рівновіддалених від сторін кута AOB.

Письмові вправи

Рівень А

616. Дано відрізок AB. Побудуйте геометричне місце точок C таких, що трикутник ABC є рівностороннім.

617. Дано промінь BC. Побудуйте геометричне місце точок A таких, що кут ABC є прямим.

618. На географічній мапі України побудуйте точку, рівновіддалену від Чернігова, Луцька і Запоріжжя.

619. Дано точки A, B, C. Побудуйте точку, яка рівновіддалена від точок A і B та лежить на заданій відстані від точки C.

620. Побудуйте точку, рівновіддалену від сторін даного кута, яка лежить на відстані d від його вершини.

621. Точка A лежить на колі радіуса R. Побудуйте точки даного кола, віддалені від точки A на відстань R.

Рівень Б

622. Доведіть, що геометричним місцем точок, віддалених від даної прямої a на відстань d, є дві прямі, паралельні a й віддалені від неї на d.

623. Геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох паралельних прямих, є пряма, яка паралельна цим прямим і проходить через середину їхнього спільного перпендикуляра. Доведіть.

624. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що проходять через дані точки A і B.

625. Знайдіть геометричне місце центрів кіл радіуса R, що проходять через дану точку A.

www.e-ranok.com.ua

626. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що дотикаються до сторін даного нерозгорнутого кута.

627. Дано відрізок AB. Знайдіть геометричне місце точок C, які є вершинами трикутників з основою AB і заданою висотою h.

628. Дано пряму AB. Побудуйте точки, які рівновіддалені від точок A і B та лежать на відстані l від прямої AB.

629. На сторонах нерозгорнутого кута B позначено точки A і C, причому $AB \neq CB$. Побудуйте точку, рівновіддалену від сторін даного кута й рівновіддалену від точок A і C. Скільки розв'язків має задача, якщо $AB = CB$?

630.* Побудуйте трикутник за двома сторонами й висотою, проведеною до однієї з цих сторін.

Рівень В

631. Знайдіть геометричне місце середин усіх хорд даного кола, паралельних даній прямій.

632. Знайдіть геометричне місце середин усіх хорд даного кола, які мають задану довжину.

633. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до даного кола з центром O в даній точці A.

634. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних прямих, що перетинаються.

635. Побудуйте коло, яке дотикається до кожної з двох прямих, що перетинаються, причому до однієї з них — у даній точці.

636. Побудуйте коло даного радіуса, що проходить через дану точку й дотикається до даної прямої.

637. На рис. 182 зображено кут (ab), вершина якого недоступна. Побудуйте бісектрису цього кута.

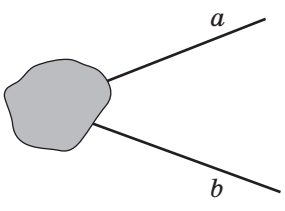


Рис. 182

638.* Побудуйте трикутник за стороною та двома висотами, проведеними до інших сторін.

639.* Побудуйте трикутник за стороною та проведеними до неї медіаною й висотою.

www.e-ranok.com.ua

Повторення перед вивченням § 23

Теоретичний матеріал

- коло
- дотична до кола

§ 19; 20

Задачі

640. Коло дотикається до катетів прямокутного трикутника в точках A і B, а центр кола O лежить на гіпотенузі. Знайдіть кут AOB.

641. Вершини A і B трикутника ABC лежать на колі з центром O, причому точка O лежить на стороні AC. Доведіть, що дотична до кола в точці B паралельна прямій AC, якщо $\angle BAO = 45°$.

www.e-ranok.com.ua

§23 Описане і вписане кола трикутника

23.1. Коло, описане навколо трикутника

Означення

Коло називається **описаним навколо трикутника**, якщо всі вершини трикутника лежать на даному колі.

У такому випадку кажуть, що трикутник є **вписаним** у дане коло.

На рис. 183 коло з центром O описане навколо трикутника ABC.

Оскільки всі вершини трикутника лежать на описаному колі, то всі вони рівновіддалені від центра кола. Цей факт лежить в основі доведення теореми про описане коло.

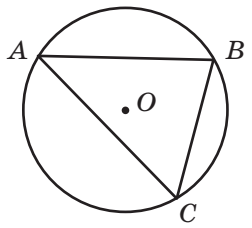


Рис. 183. Коло, описане навколо трикутника ABC

Теорема (про коло, описане навколо трикутника)

Навколо будь-якого трикутника можна описати єдине коло. Центр цього кола є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника.

Доведення

□ Нехай прямі a і b — серединні перпендикуляри до сторін AB і BC даного трикутника ABC (рис. 184).

Спочатку доведемо методом від супротивного, що прямі a і b перетинаються. Припустимо, що ці прямі не перетинаються, тобто $a \parallel b$. Тоді, оскільки $a \perp AB$, то $AB \perp b$ за наслідком з теореми про властивості кутів при паралельних прямих. Але $BC \perp b$ за побудовою, звідси $AB \parallel BC$, що неможливе за умовою. Отже, прямі a і b перетинаються в певній точці O.

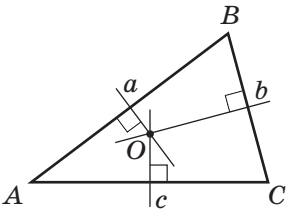


Рис. 184. Точка O — точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника ABC

www.e-ranok.com.ua

За теоремою про серединний перпендикуляр точка O рівновіддалена від точок A і B (тобто $OA = OB$) і рівновіддалена від точок B і C (тобто $OB = OC$). Звідси $OA = OB = OC$. Отже, існує коло з центром O, що проходить через усі вершини трикутника ABC.

Доведемо методом від супротивного, що таке коло єдине.

Припустимо, що навколо трикутника можна описати ще одне коло, відмінне від побудованого. Тоді центр цього кола рівновіддалений від вершин трикутника й тому збігається з O, точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника. Радіус цього кола дорівнює відстані від точки O до вершин трикутника. Отже, це коло збігається з побудованим.

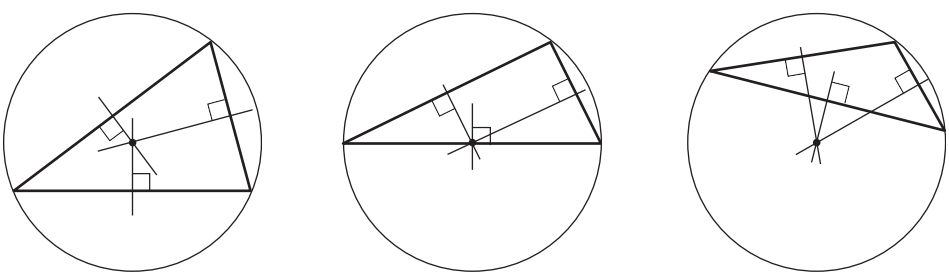
І нарешті, серединний перпендикуляр c до сторони AC містить усі точки, рівновіддалені від точок A і C. Оскільки точка O також рівновіддалена від точок A і C, то цей серединний перпендикуляр проходить через точку O.

Теорему доведено. ■

Наслідок

Три серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці.

Зауважимо, що центр описаного кола не завжди лежить усередині трикутника; він також може лежати на одній із його сторін або поза трикутником (рис. 185).



Усередині трикутника | На стороні трикутника | Поза трикутником

Рис. 185. Розміщення центра описаного кола

www.e-ranok.com.ua

23.2. *Коло, вписане у трикутник*

Означення

Коло називається **вписаним у трикутник**, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

У цьому випадку трикутник є **описаним** навколо даного кола.

На рис. 186 коло з центром O вписане у трикутник ABC. Прямі, що містять сторони трикутника, є дотичними до вписаного кола, а точки дотику лежать на сторонах трикутника. Радіуси вписаного кола, проведені в точки дотику, перпендикулярні до сторін даного трикутника.

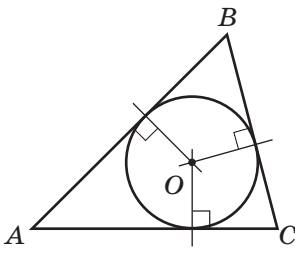


Рис. 186. Коло, вписане у трикутник ABC

Далі в такому випадку ми будемо говорити, що центр вписаного кола рівновіддалений від сторін трикутника.

Теорема (про коло, вписане у трикутник)

У будь-який трикутник можна вписати єдине коло. Центр цього кола є точкою перетину бісектрис трикутника.

Доведення

□ Нехай AD і BE — бісектриси даного трикутника ABC (рис. 187).

Доведемо методом від супротивного, що ці бісектриси перетинаються. Нехай AD і BE не перетинаються. Тоді $AD \parallel BE$, а кути BAD і ABE — внутрішні односторонні при паралельних прямих AD і BE та січній AB. Сума цих кутів має дорівнювати 180°, що суперечить теоремі про суму кутів трикутника.

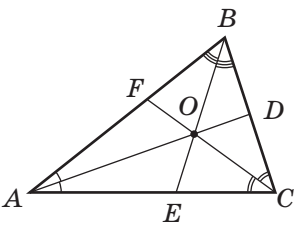


Рис. 187. Точка O — точка перетину бісектрис трикутника ABC

Отже, бісектриси AD і BE перетинаються в певній точці O. Тоді за теоремою про бісектрису кута точка O рівновіддалена від сторін AB і AC, а також рівновіддалена від сторін AB і BC. Таким чином, три перпендикуляри, проведені з точки O

www.e-ranok.com.ua

до сторін даного трикутника, рівні. Отже, існує коло з центром O, що дотикається до всіх сторін трикутника ABC.

Доведемо методом від супротивного, що це коло єдине.

Припустимо, що у трикутник можна вписати ще одне коло, відмінне від побудованого. Тоді його центр однаково віддалений від сторін трикутника й збігається з O, точкою перетину бісектрис трикутника. Радіус цього кола дорівнює відстані від точки O до сторін трикутника. Таким чином, це коло збігається з побудованим.

І нарешті, бісектриса CF містить усі точки, рівновіддалені від сторін CA і CB. Оскільки точка O також рівновіддалена від CA і CB, то ця бісектриса проходить через точку O. Теорему доведено. ■

Наслідок

Три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

Оскільки всі бісектриси трикутника лежать усередині нього, то й центр вписаного кола завжди лежить усередині трикутника.

Задача

У рівносторонньому трикутнику центри описаного і вписаного кіл збігаються. Доведіть.

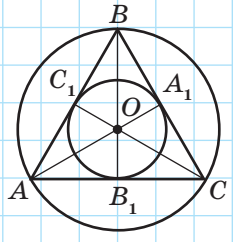


Рис. 188

Розв'язання

У рівносторонньому трикутнику ABC бісектриси AA_1, BB_1 і CC_1 є також медіанами й висотами (рис. 188). Це означає, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 — серединні перпендикуляри до сторін трикутника ABC. Оскільки всі вони перетинаються в одній точці, то ця точка — центр описаного і вписаного кіл трикутника ABC.

www.e-ranok.com.ua

Справджується також і обернене твердження: ***якщо в трикутнику центри описаного і вписаного кіл збігаються, то цей трикутник є рівностороннім.*** Спробуйте довести це самостійно.

Запитання й задачі

Усні вправи

642. Дано трикутник і коло. Визначте, чи є дане коло описаним навколо трикутника або вписаним у нього, якщо:

а) центр кола рівновіддалений від усіх сторін трикутника;
б) центр кола рівновіддалений від усіх вершин трикутника;
в) усі сторони трикутника — хорди кола;
г) усі сторони трикутника дотикаються до кола.

643. Серединні перпендикуляри до сторін трикутника ABC перетинаються в точці O. Чи означає це, що:

а) $OA = OB$;
б) $\angle ABO = \angle CBO$;
в) точка O може лежати на одній зі сторін трикутника?

644. Точка O — центр кола, вписаного у трикутник ABC. Чи означає це, що:

а) $OA = OB$;
б) $\angle ABO = \angle CBO$;
в) точка O може лежати поза даним трикутником?

645. Навколо трикутника описано коло і в нього вписано коло. Чи можуть ці кола мати рівні радіуси; спільний центр?

Графічні вправи

646. Накресліть коло й позначте на ньому точки A, B і C. Проведіть перпендикуляри з центра кола до сторін трикутника ABC. У якому відношенні вони ділять сторони трикутника?

647. Накресліть коло з центром O і проведіть до нього три дотичні, що попарно перетинаються. Позначте точки перетину дотичних A, B і C. У якому відношенні промені AO, BO і CO ділять кути трикутника ABC?

www.e-ranok.com.ua

Письмові вправи

Рівень А

648. Навколо рівнобедреного трикутника ABC $(AB = BC)$ описано коло з центром O (рис. 189).

а) Доведіть, що $\angle AOB = \angle COB$.

б) Знайдіть кут AOC, якщо $\angle ABC = 40°$.

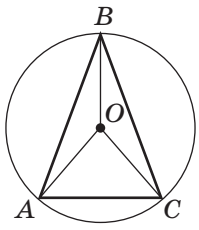


Рис. 189

649. У рівнобедрений трикутник ABC $(AB = BC)$ вписано коло з центром O (рис. 190).

а) Доведіть, що трикутник AOC рівнобедрений.

б) Знайдіть кут ABC, якщо $\angle AOC = 100°$.

650. Побудуйте коло, вписане в даний трикутник.

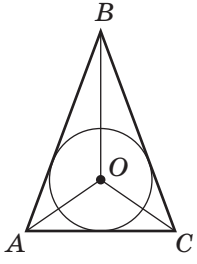


Рис. 190

651. Побудуйте коло, описане навколо даного трикутника.

652. Точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC, OD — відстань від точки O до сторони AB. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $AD = 9$ см.

653. Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC. Знайдіть кут BAO, якщо $\angle BAC = 100°$.

Рівень Б

654. Серединні перпендикуляри до сторін трикутника ABC перетинаються в точці O. Знайдіть довжину сторони AB, якщо $OA = 8$ см, $\angle AOB = 60°$.

655. У трикутнику ABC бісектриси кутів A і C перетинаються в точці O. Знайдіть кут BAC, якщо $AB = BC$, $\angle ABO = 35°$.

656.* Побудуйте трикутник за двома сторонами й радіусом описаного кола.

657.* Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою й радіусом описаного кола.

658. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC вписане коло дотикається до сторін трикутника в точках D, E і F (рис. 191). Знайдіть периметр трикутника, якщо $AF = 5$ см, $BD = 6$ см.

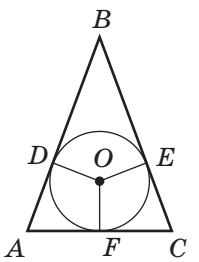


Рис. 191

www.e-ranok.com.ua

659. Точка дотику вписаного кола ділить бічну сторону рівнобедреного трикутника на відрізки 3 см і 5 см, починаючи від основи. Знайдіть периметр трикутника.

Рівень В

660.* Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, та радіусом описаного кола.

661.* Побудуйте трикутник за висотою й медіаною, проведеними з однієї вершини, та радіусом описаного кола.

662. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 220 см. Точка дотику вписаного кола ділить бічну сторону на відрізки у відношенні $3:4$. Знайдіть сторони трикутника. Скільки розв'язків має задача?

663. а) У трикутнику ABC вписане коло дотикається до сторін трикутника AB, BC і AC в точках D, E, F відповідно. Доведіть, що $AD = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$.

б) (опорна) У прямокутному трикутнику з катетами a, b і гіпотенузою c радіус вписаного кола обчислюється за формулою $r = \dfrac{a + b - c}{2}$. Доведіть.

664 (опорна).

а) У прямокутному трикутнику центр описаного кола лежить на середині гіпотенузи.

б) Якщо радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює половині його сторони, то цей трикутник прямокутний.

Доведіть.

Онлайн-тренування для підготовки до контрольної роботи № 4

Задачі для підготовки до контрольної роботи № 4

1. Через точку A кола з центром O проведено хорду AB і діаметр AC. Знайдіть кут BAC, якщо кут BOC дорівнює $70°$.

www.e-ranok.com.ua

2. Прямі CA і CB — дотичні до кола з центром у точці O (рис. 192). Доведіть, що OC — бісектриса кута AOB.

3. Два кола з радіусами 32 см і 12 см дотикаються. Знайдіть відстань між центрами кіл. Скільки розв'язків має задача?

4. Точка дотику вписаного кола ділить сторону рівностороннього трикутника на два відрізки, один із яких на 15 см менший, ніж периметр трикутника. Знайдіть сторону трикутника.

5.* Побудуйте рівнобедрений трикутник за бісектрисою, проведеною до основи, та радіусом описаного кола.

6. Дві рівні та взаємно перпендикулярні хорди кола точкою перетину діляться на частини завдовжки 4 см і 16 см (рис. 193). Знайдіть радіус кола, яке дотикається до цих хорд і має спільний центр із даним колом.

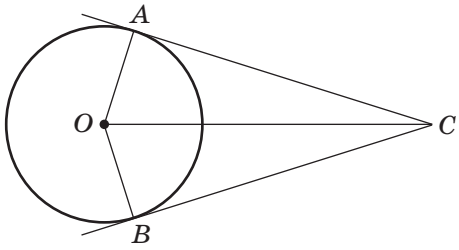


Рис. 192

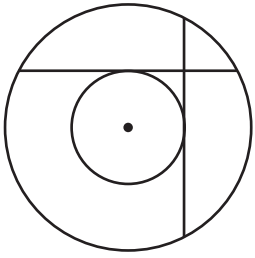
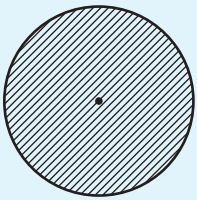
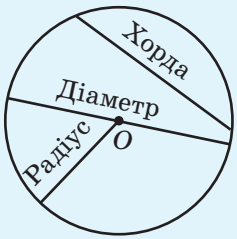
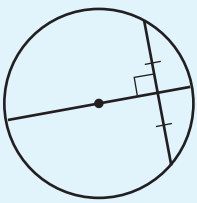
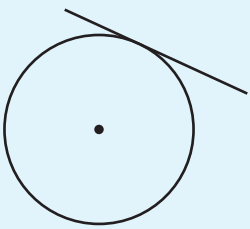


Рис. 193

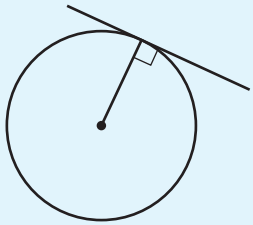
www.e-ranok.com.ua

Підсумки

ПІДСУМКОВИЙ ОГЛЯД РОЗДІЛУ III

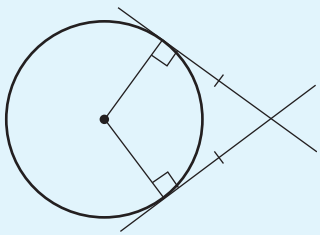
КОЛО І КРУГ	
	**Колом** називається геометрична фігура, що складається з усіх точок площини, віддалених від даної точки **(центра кола)** на однакову відстань. **Кругом** називається частина площини, яка обмежена колом і містить його центр
	**Радіусом** кола (круга) називається відстань від центра кола до будь-якої його точки. **Хордою** називається відрізок, що сполучає дві точки кола. **Діаметром** називається хорда, яка проходить через центр кола
	Діаметр, перпендикулярний до хорди, проходить через її середину. Діаметр, проведений через середину хорди, яка не є діаметром, перпендикулярний до цієї хорди
ДОТИК ПРЯМОЇ І КОЛА	
	**Дотичною** до кола називається пряма, що має з колом єдину спільну точку

www.e-ranok.com.ua



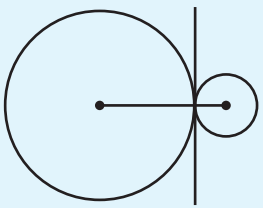
Властивість дотичної: дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику

Ознака дотичної: якщо пряма проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку, то вона є дотичною до кола



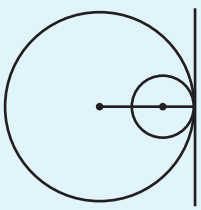
Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні

ДОТИК ДВОХ КІЛ



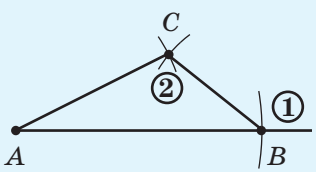
Зовнішній дотик

Два кола, що мають спільну точку, **дотикаються** в цій точці, якщо вони мають у ній спільну дотичну



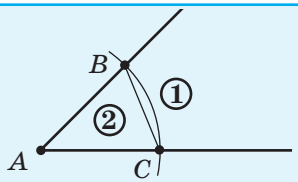
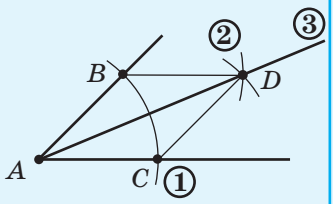
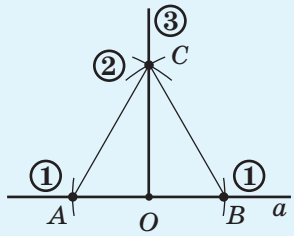
Внутрішній дотик

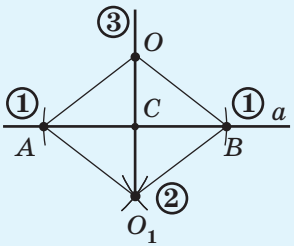
ОСНОВНІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ*

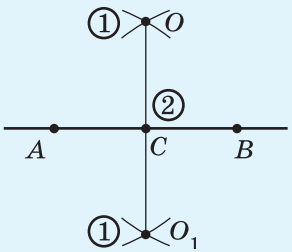
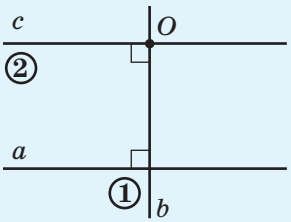


Побудова трикутника за даними сторонами

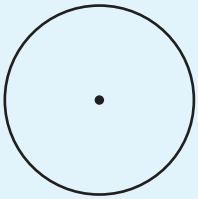
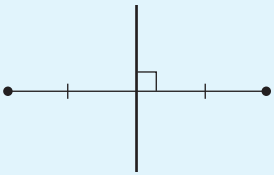
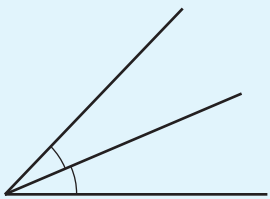
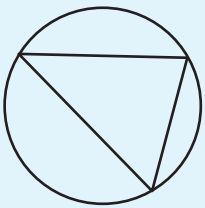
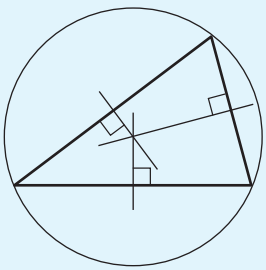
www.e-ranok.com.ua

<table>
<tr><td> 
</td><td colspan="2">Побудова кута, який дорівнює даному</td></tr>
<tr><td> 
</td><td colspan="2">Побудова бісектриси даного нерозгорнутого кута</td></tr>
<tr><td> 

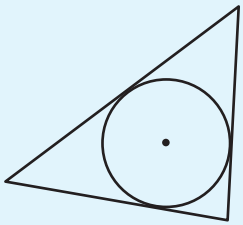
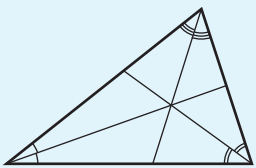
Точка O лежить на даній прямій</td><td>Побудова прямої, що перпендикулярна до даної і проходить через точку O</td><td> 

Точка O лежить поза даною прямою</td></tr>
<tr><td> 
</td><td colspan="2">Побудова середини даного відрізка і серединного перпендикуляра до нього</td></tr>
<tr><td> 
</td><td colspan="2">Побудова прямої, що проходить через дану точку паралельно даній прямій</td></tr>
</table>

www.e-ranok.com.ua

ГЕОМЕТРИЧНІ МІСЦЯ ТОЧОК	
	***Коло*** є геометричним місцем точок, віддалених від даної точки площини на однакову відстань
	***Серединний перпендикуляр*** до відрізка є геометричним місцем точок внутрішньої області кута, рівновіддалених від кінців цього відрізка
	***Бісектриса*** нерозгорнутого кута є геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін цього кута
ОПИСАНЕ КОЛО	
	Коло називається **описаним навколо трикутника**, якщо всі вершини трикутника лежать на цьому колі
	Навколо будь-якого трикутника можна описати єдине коло. Центр цього кола є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника.

www.e-ranok.com.ua

ВПИСАНЕ КОЛО	
	Коло називається **вписаним у трикутник**, якщо воно дотикається до всіх його сторін
	У будь-який трикутник можна вписати єдине коло. Центр цього кола є точкою перетину бісектрис трикутника

Контрольні запитання

1. Дайте означення кола і круга. У даному колі вкажіть центр, радіус, діаметр, хорду.

2. Дайте означення дотичної до кола.

3. Сформулюйте й доведіть властивість і ознаку дотичної.

4. Сформулюйте й доведіть властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки до кола.

5. Дайте означення дотику двох кіл. Назвіть види дотику кіл.

6.* Поясніть, як побудувати трикутник за даними сторонами.

7.* Поясніть, як побудувати кут, що дорівнює даному нерозгорнутому куту.

8.* Поясніть, як розділити даний кут навпіл.

9.* Поясніть, як провести через дану точку пряму, перпендикулярну до даної прямої.

10.* Поясніть, як побудувати серединний перпендикуляр до даного відрізка.

11.* Поясніть, як розділити даний відрізок навпіл.

12.* Поясніть, як провести через дану точку пряму, паралельну даній прямій.

www.e-ranok.com.ua

13. Дайте означення геометричного місця точок. Назвіть геометричне місце точок, віддалених від даної точки на задану відстань.

14. Сформулюйте й доведіть теорему про серединний перпендикуляр до відрізка.

15. Сформулюйте й доведіть теорему про бісектрису кута.

16. Дайте означення кола, описаного навколо трикутника.

17. Сформулюйте й доведіть теорему про коло, описане навколо трикутника.

18. Дайте означення кола, вписаного у трикутник.

19. Сформулюйте й доведіть теорему про коло, вписане у трикутник.

Додаткові задачі

665. Паралельні прямі a і b є дотичними до кола радіуса R. Знайдіть відстань між цими прямими.

666. Відрізок AB — діаметр кола, хорди AC і BD паралельні. Доведіть, що відрізок CD також є діаметром кола.

667. На площині необхідно знайти точки, віддалені від кожної з даних точок A і B на 3 см. Як залежить кількість таких точок від довжини відрізка AB?

668. Якщо пряма перетинає два кола, що мають спільний центр (концентричні кола), то її відрізки, які містяться між цими колами, рівні. Доведіть.

669. Пряма, паралельна хорді AB, дотикається до кола в точці C. Доведіть, що трикутник ABC є рівнобедреним.

670. Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за бічною стороною й радіусом описаного кола.

671. Доведіть, що радіуси кіл, вписаних у рівні трикутники, рівні.

672. До кола, вписаного у рівносторонній трикутник зі стороною a, проведено дотичну, що перетинає дві сторони трикутника. Знайдіть периметр трикутника, який відтинається від даного.

673. На колі будують послідовність точок: першу точку обрано довільно, а кожна наступна точка віддалена від попередньої на відстань, що дорівнює радіусу кола. Яку найбільшу кількість різних точок можна побудувати в такий спосіб?

www.e-ranok.com.ua

674. Центр кола, вписаного у трикутник, лежить на одній із його висот. Знайдіть кути трикутника, якщо один із них утричі більший, ніж інший.

675. Центр O кола, описаного навколо трикутника ABC, лежить на медіані BM. Знайдіть кути трикутника, якщо $\angle AOB = 140°$.

676. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle ADC$.

а) Доведіть, що пряма AC — геометричне місце точок, рівновіддалених від точок B і D.

б) Чи завжди промінь AC є геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута BAD? Відповідь обґрунтуйте.

677.* Побудуйте на катеті прямокутного трикутника точку, однаково віддалену від гіпотенузи й другого катета.

678. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC серединний перпендикуляр до сторони AB перетинає сторону BC у точці M. Знайдіть кут MAC, якщо $\angle C = 70°$.

679. Точки D, E, F — точки дотику вписаного кола зі сторонами трикутника ABC. Доведіть, що бісектриси кутів трикутника ABC перпендикулярні до відповідних сторін трикутника DEF.

680. Якщо два кола з центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B, то прямі AB і O_1O_2 взаємно перпендикулярні. Доведіть.

681. Точка A лежить поза колом із центром O. Побудуйте дотичну до цього кола, що проходить через точку A.

682. У трикутник ABC ($AB = c$, $BC = a$, $AC = b$) вписано коло. Дотична до цього кола перетинає сторони AB і BC у точках K і L відповідно. Знайдіть периметр трикутника KBL.

www.e-ranok.com.ua

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Найпростіші геометричні задачі на побудову. Виникнення задач на побудову було зумовлене потребою у вимірюванні земельних ділянок і будівництвом. Значних успіхів у розв'язуванні таких задач досягли давньогрецькі вчені, насамперед Евклід і Платон, у VII—III ст. до н. е. Саме з часів Платона в розв'язанні задач на побудову стали виділяти чотири етапи: аналіз, власне побудову, доведення й дослідження.

Задачі, які неможливо розв'язати за допомогою циркуля і лінійки. Особливий інтерес математиків давнини викликали три класичні задачі, які не вдавалося розв'язати за допомогою циркуля і лінійки, — про квадратуру круга, трисекцію кута й подвоєння куба. Задача про квадратуру круга полягала в побудові квадрата, площа якого дорівнює площі даного круга. У задачі про трисекцію кута намагалися поділити даний кут на три рівні частини (таку задачу нескладно розв'язати для деяких конкретних кутів, наприклад розгорнутого, прямого, але не для будь-якого кута).



www.e-ranok.com.ua

Задача про подвоєння куба полягала в побудові куба, об'єм якого вдвічі більший, ніж об'єм даного куба. Неможливість розв'язати ці задачі за допомогою циркуля й лінійки було доведено в XIX ст.

Циркуль чи лінійка? Цікавою є історія обмежень інструментарію для розв'язування задач на побудову. У X ст. арабський математик Абу-ль-Вафа запропонував користуватись у побудовах однобічною лінійкою та циркулем зі сталим розхилом. У 1797 р. італієць Лоренцо Маскероні довів: будь-яку задачу на побудову, розв'язувану за допомогою циркуля і лінійки, можна розв'язати, скориставшись лише циркулем (при цьому передбачалося, що через будь-які дві точки може бути проведена пряма). А ще раніше, в 1672 р., такого самого висновку дійшов данець Ґ. Мор.

Так теорема про можливість побудов тільки циркулем дістала назву «теорема Мора — Маскероні». У 1833 р. швейцарський геометр Якоб Штейнер показав, що в разі наявності на площині кола з позначеним центром будь-яку задачу на побудову можна розв'язати за допомогою лише лінійки.



Задачі на побудову відіграють особливу роль у навчанні геометрії, адже вони чудово розвивають логіку та абстрактне мислення. Фахівці вважають задачі на побудову одними з найкрасивіших і найкорисніших задач геометрії.

www.e-ranok.com.ua

Тематика повідомлень і рефератів до розділу III

1. Коло в математичних іграх і головоломках.

2. Дотик двох і трьох кіл.

3. Зовнівписане коло трикутника.

4. Методи геометричних побудов. Побудови лише циркулем, лише лінійкою.

5. Геометричні місця точок.

Рекомендовані джерела інформації

1. Александров И. И. Сборник геометрических задач на построение. — М. : УРСС, 2004.

2. Бурда М. І. Розв'язування задач на побудову. — К. : Рад. шк., 1986.

3. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. — М. : Оникс, 1994.

4. Глейзер Г. И. История математики в школе. VII–VIII кл. — М. : Просвещение, 1982.

5. Інтернет-бібліотека МЦНМО : http://www.mccme.ru/free-books/

6. Методика розв'язування задач на побудову / О. М. Астряб, О. С. Смогоржевський, М. Б. Гельфанд та ін. — К. : Рад. шк., 1960.

7. Перельман Я. И. Занимательная геометрия. — М. : Физматгиз, 1959.

8. Тесленко І. Ф. Геометричні побудови. — К. : Рад. шк., 1956.

Відеоматеріали за розділом III

www.e-ranok.com.ua

Додатки

Додаток 1. Про аксіоми геометрії

У розділі I ви познайомилися з елементарними геометричними фігурами: точкою і прямою, а також променем, відрізком і кутом. Їхні основні властивості — аксіоми — не доводяться, але є фундаментом для доведення всіх інших тверджень.

Першу спробу логічно обґрунтувати геометрію за допомогою систематизованого переліку вихідних положень (аксіом, або постулатів) здійснив давньогрецький математик Евклід у своїй славнозвісній книзі «Начала». Протягом багатьох століть учені-геометри спиралися саме на евклідові аксіоми. Але в XIX–XX ст., після створення Лобачевським неевклідової геометрії, дослідження системи геометричних аксіом вийшли на якісно новий рівень. Одним із тих, хто здійснив помітний внесок у вдосконалення аксіоматики, був видатний український математик Олексій Васильович Погорєлов. У своїй фундаментальній праці «Основи геометрії» (1983) він розробив власну вдосконалену систему аксіом евклідової геометрії, що подолала низку істотних труднощів, які виникли у зв'язку з введенням поняття міри для відрізків і кутів. Понад те, О. В. Погорєлов запропонував спрощений варіант геометричної аксіоматики, призначений саме для викладання геометрії в школі. Цей варіант покладено в основу підручника «Геометрія», за яким понад чверть століття вивчали й, без сумніву, надалі вивчатимуть геометрію в школі.

Ось яку систему аксіом шкільного курсу запропонував О. В. Погорєлов.

I. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і тільки одну.

II. Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

III. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

IV. Пряма розбиває площину на дві півплощини. Якщо кінці відрізка належать одній півплощині, то відрізок не перетинає пряму. Якщо кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму.

V. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

www.e-ranok.com.ua

VI. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини, і тільки один.

VII. Від будь-якої півпрямої в дану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою за 180°, і тільки один.

VIII. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому, в заданому розміщенні відносно даної півпрямої.

IX. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більш ніж одну пряму, паралельну даній.

Цієї системи аксіом ми дотримуємось і в цьому підручнику, зважаючи на прийняту термінологію. Деякі аксіоми сформульовано в розділі I, інші аксіоми не формулювались, проте фактично використовувались у міркуваннях. Зазначимо, що автори не ставили за мету подавати в цьому підручнику абсолютно досконалу й логічно завершену систему аксіом, а зосередили основну увагу на практичному застосуванні основних властивостей елементарних геометричних фігур у доведенні теорем і розв'язуванні задач. Надалі, у ході вивчення властивостей фігур у просторі, формулювання деяких аксіом буде уточнено, а саму систему аксіом — розширено.

Загалом же, система аксіом має відповідати умовам ***незалежності*** (не містити аксіом, які можна вивести за допомогою інших аксіом), ***несуперечливості*** (не мати явних або прихованих суперечностей) і ***повноти*** (містити достатню кількість аксіом, щоб довести основні твердження). Дослідження проблем побудови таких систем аксіом є змістом одного з розділів сучасної геометрії.

Додаток 2. Метод допоміжного трикутника*

Метод допоміжного трикутника застосовується під час розв'язування багатьох задач на побудову. Використовуючи цей метод, необхідно дотримуватися такої послідовності дій:

1) припустивши, що шуканий трикутник побудовано, виконати рисунок-ескіз і знайти на ньому допоміжний трикутник, спосіб побудови якого відомий (або отримати такий трикутник шляхом додаткових побудов);
2) з'ясувати, які вершини шуканого трикутника ми дістанемо, побудувавши допоміжний трикутник;
3) визначити на підставі даних задачі послідовність побудови інших вершин, припустивши, що допоміжний трикутник побудовано;

www.e-ranok.com.ua

4) здійснити всі заплановані побудови;
5) провести необхідні доведення та дослідження.

Доволі часто метод допоміжного трикутника використовують у поєднанні з іншими методами. Розглянемо такі випадки на прикладах.

Задача

Побудуйте прямокутний трикутник за катетом та сумою другого катета й гіпотенузи.

Розв'язання

Нехай a і $b+c$ — катет і сума другого катета й гіпотенузи трикутника ABC, який необхідно побудувати (рис. 194).

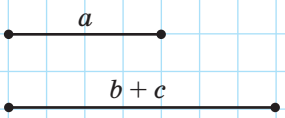


Рис. 194

Аналіз

Припустимо, що трикутник ABC побудовано (рис. 195). Відкладемо на промені BC відрізок CD завдовжки c і сполучимо точки A і D. Трикутник ABD прямокутний із катетами a і $b+c$, тобто може бути побудований за даними задачі і є допоміжним. Побудувавши його, дістанемо вершини A і B шуканого трикутника. Для побудови вершини C скористаємось однією з ознак рівнобедреного трикутника. Точка C є точкою перетину серединного перпендикуляра до сторони AD з променем BD.

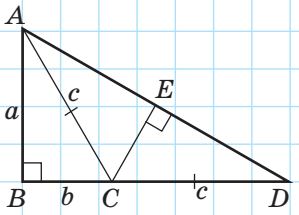


Рис. 195

Побудова

1. Побудуємо прямий кут із вершиною B.
2. Відкладемо на сторонах цього кута відрізки $AB=a$ і $BD=b+c$ та сполучимо точки A і D. Трикутник ABD є допоміжним.
3. Побудуємо перпендикуляр до відрізка AD, що проходить через його середину E. Нехай C — точка його перетину з променем BD.
4. Сполучимо точки A і C.

www.e-ranok.com.ua

Доведення

У трикутнику ABC $\angle B = 90°$, $AB = a$ за побудовою. У трикутнику ACD CE — висота й медіана (за побудовою). Таким чином, трикутник ACD рівнобедрений з основою AD, звідки $CA = CD = c$. За побудовою $BD = BC + CD = b + c$, отже, $BC + CA = b + c$. Таким чином, трикутник ABC є шуканим.

Дослідження

Відповідно до нерівності трикутника задача має розв'язки за умови $a < b + c$.

У ході розв'язування цієї задачі ми використали ***метод спрямлення***. Суть його така: якщо в умові задачі на побудову задано суму (або різницю) відрізків, то на рисунку-ескізі їх необхідно відкласти на одній прямій від спільного кінця так, щоб інші кінці цих відрізків утворили заданий відрізок-суму (різницю). Завдяки такій додатковій побудові вдається дістати допоміжний трикутник.

Задача

Побудуйте трикутник за медіаною й двома кутами, на які вона ділить кут трикутника.

Розв'язання

Нехай m — медіана трикутника ABC, який необхідно побудувати, α і β — кути, на які медіана ділить кут трикутника (рис. 196).

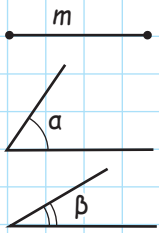


Рис. 196

Аналіз

Припустимо, що трикутник ABC побудовано (рис. 197). Застосуємо метод подвоєння медіани. Для цього на промені BM відкладемо відрізок MD, що дорівнює m, і сполучимо точки D і A. За першою ознакою рівності трикутників $\Delta AMD = \Delta CMB$ ($AM = CM$ за означенням медіани, $BM = DM$ за побудовою, $\angle AMD = \angle CMB$ як вертикальні). Тоді $\angle ADM = \angle CBM = \beta$.

www.e-ranok.com.ua

Отже, трикутник ABD є допоміжним, оскільки його можна побудувати за стороною й прилеглими до неї кутами ($BD=2m$, $\angle ABD=\alpha$, $\angle ADB=\beta$).

Побудувавши цей трикутник, дістанемо вершини A і B шуканого трикутника. Для побудови вершини C достатньо подвоїти в трикутнику ABD медіану AM.

Побудова (скорочений план)

1. Побудуємо трикутник ABD, у якому $BD=2m$, $\angle ABD=\alpha$, $\angle ADB=\beta$. Трикутник ABD є допоміжним.
2. Побудуємо в трикутнику ABD медіану AM і на її продовженні відкладемо відрізок MC, що дорівнює AM.
3. Сполучимо точки B і C.

Доведення

$\Delta AMD=\Delta CMB$ за першою ознакою рівності трикутників ($MD=MB$, $AM=MC$ за побудовою, $\angle AMD=\angle CMB$ як вертикальні). Тоді $\angle CBM=\angle ADM=\beta$. Також за побудовою $\angle ABM=\alpha$. У трикутнику ABC $BM=m$ — медіана, оскільки за побудовою $BD=2m$ і $AM=MC$. Таким чином, трикутник ABC — шуканий.

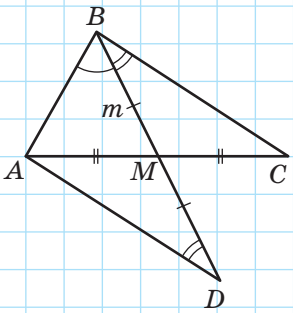


Рис. 197

Задача

Побудуйте трикутник за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, і висотою, проведеною до іншої сторони.

Розв'язання

Нехай a — сторона шуканого трикутника ABC, m_a — проведена до неї медіана, h_b — висота трикутника, проведена до іншої сторони (рис. 198). Побудуємо цей трикутник.

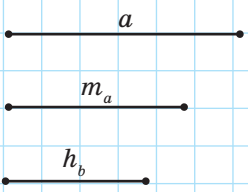


Рис. 198

Аналіз

Нехай трикутник ABC побудовано (рис. 199). Тоді прямокутний трикутник BCH можна побудувати за

www.e-ranok.com.ua

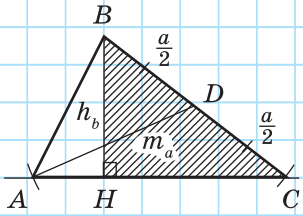


Рис. 199

гіпотенузою BC і катетом BH: на стороні прямого кута H відкладемо катет $BH = h_b$, тоді C — точка перетину кола з центром B радіуса a з другою стороною прямого кута.

У такий спосіб ми побудуємо вершини B і C шуканого трикутника. Для побудови вершини A знову використаємо метод геометричних місць. Оскільки основа висоти BH належить стороні AC, то точка A має лежати на прямій HC. Крім того, оскільки $AD = m_a$, то точка A має лежати на відстані m_a від точки D. Це означає, що A — точка перетину прямої CH і кола радіуса m_a з центром D.

Побудова

1. Побудуємо прямий кут із вершиною H.
2. Відкладемо на стороні цього кута відрізок BH, $BH = h_b$.
3. Побудуємо коло з центром B радіуса a.

Нехай C — точка перетину цього кола з другою стороною прямого кута.

4. Сполучимо точки B і C та поділимо відрізок BC навпіл. Нехай точка D — його середина.
5. Проведемо пряму CH.
6. Побудуємо коло з центром D радіуса m_a. Нехай A — точка перетину цього кола з прямою CH.
7. Сполучимо точки A і B.

Доведення

У трикутнику ABC $BC = a$, $AD = m_a$, AD — медіана, $BH = h_b$, BH — висота (за побудовою). Отже, трикутник ABC — шуканий.

Дослідження

Відповідно до наслідку теореми про порівняння сторін і кутів трикутника допоміжний трикутник існує, якщо $h_b < a$. Залежно від довжини медіани m_a задача має один розв'язок, або два, або не має жодного.

www.e-ranok.com.ua

Відповіді та вказівки

Розділ І. Елементарні геометричні фігури та їхні властивості. Взаємне розміщення прямих на площині

11. Одну. **13.** По один бік. Не може. **14.** Точка K. **15.** Ні. **16.** Дві. **17.** Точки P і Q. Так. **18.** Шість. **19.** Чотири. **20.** Красноград. **21.** Точка X. **22.** Точка B. **23.** Точка C. **24.** Так. **25.** Не обов'язково. **26.** Одну; чотири; шість. **27.** Одна або три. **28.** $n-1$ точка — на одній прямій, одна точка — поза цією прямою. **29.** Чотири. Одна. Зміниться. **30.** а) Ні; б) так. **31.** б) і в) . **41.** а) 7 см; б) 2,5 см. **42.** 4 см. **43.** MR і PN. **44.** AB і BC. **45.** 9 см або 3,8 см. **46.** 14,2 см або 1,8 см. **47.** Точка P. **48.** а) 16 см і 8 см; б) 12 см і 21 см. **49.** 5,1 см. **50.** 16,4 мм або 7,8 мм. **51.** 11,6 см або 6,8 см. **52.** а) 24 см; б) 16 см. **53.** MK. **54.** AC. **55.** а) 1-й випадок: B між A і M, $BM=1$ см; 2-й випадок: A між B і M, $AM=1$ см; б) будь-яка точка відрізка AB; в) 1-й випадок: M між A і B, $AM=4$ см; 2-й випадок: B між A і M, $BM=6$ см. **56.** Три відрізки завдовжки $2a$ і два відрізки завдовжки $3a$. **57.** 10 см. **58.** 10 см. **60.** Так. **61.** Ні. **62.** а) Ні; б) так. **72.** а) $126°$; б) $81°$. **73.** $40°$. **74.** Ні. **75.** $76°$; $38°$. **76.** а) $104°$; б) $45°$. **77.** а) $55°$ і $95°$; б) $60°$ і $90°$. **78.** а) $20°$ і $100°$; б) $45°$ і $75°$. **79.** $35°$. **80.** $76°$. **81.** $140°$. **82.** $120°$. **83.** $80°$. **84.** $120°$. **85.** П'ять. **86.** а) Ні; б) так; в) так. **95.** Дві. Ні. **96.** Ні. **99.** Шість. **100.** Чотири. **101.** Три або чотири. **102.** Одна або жодної. **105.** Три або чотири. **108.** $25°$ або $65°$. **109.** $90°$. **117.** Чотири. **118.** Дві. **119.** а) $25°$ і $155°$; б) $55°$ і $125°$. **120.** а) $45°$ і $135°$; б) $80°$ і $100°$. **121.** $80°$. **122.** $\angle 2 < \angle 4$. **123.** $71°$. **124.** $60°$. **125.** $100°$. **126.** $30°$. **127.** $120°$. **128.** $70°$. **129.** $140°$ і $40°$. **130.** $120°$. **131.** $90°$. **132.** Ні. **133.** *Вказівка.* Доведіть, що кут AOC розгорнутий. **134.** m і p, n і k. **135.** $148°$, $32°$. **145.** $55°$; $125°$; $55°$. Кут між прямими $55°$. **146.** а) $46°$; $134°$; $46°$; $134°$; б) $45°$; $135°$; $45°$; $135°$. **147.** а) $160°$; $20°$; $160°$; $20°$; б) $65°$; $115°$; $65°$; $115°$. **151.** $20°$. **152.** $65°$. **153.** а) $65°$; $115°$; $65°$; $115°$; б) $80°$; $100°$; $80°$; $100°$. **154.** а) $70°$; б) $60°$. **155.** $85°$; $56°$; $85°$; $39°$. **156.** $36°$. **159.** $60°$. **162.** $105°$. **163.** Дві. **164.** 16 см або 32 см. **165.** $35°$ або $15°$. **166.** Дві точки на промені BA, такі, що $BD=1$ або $BD=3$. **167.** В одному напрямку — на 5 одиниць, у різних — на 2 одиниці. **168.** *Вказівка.* $6=5+5-2-2$ або $2+2+2$. **169.** *Вказівка.* $40°=180°-35°-35°-35°-35°$. **170.** Відкласти послідовно 11 кутів величиною $17°$ зі спільними сторонами. Тоді кут між крайніми сторонами становитиме $17°\cdot 11=187°$, що на $7°$ більше, ніж розгорнутий кут. б) *Вказівка.* $17°\cdot 10=170°$, $180°-170°=10°$. **171.** *Вказівка.* $27°\cdot 10-180°=90°$. **172.** 6.

www.e-ranok.com.ua

Розділ II. Трикутники. Ознаки рівності трикутників

184. 16 см. **185.** B. **186.** а) $125°$; б) 11 см; в) 26 см. **187.** а) C; б) FK; в) $\triangle FEK$. **188.** QPR. **189.** $\triangle ABC = \triangle YZX$. **190.** Три. **191.** а) 45 мм; б) 12 мм; в) 14 мм. **192.** B і C. **193.** $\angle D = \angle K = 45°$, $\angle B = \angle E = 55°$, $\angle C = \angle N = 80°$. **194.** $DE = KM = 9$ см, $BC = EF = 8$ см, $AC = DF = KN = 7$ см. **195.** Ні. **197.** A і C. **198.** B. **199.** $\triangle ABC = \triangle YXZ$. **200.** $\triangle ABC = \triangle ZYX$. **212.** б) 8 см. **213.** $25°$. **218.** 14 см. **219.** 4 см. **224.** *Вказівка.* Доведіть рівність трикутників ABD і CBD. **226.** Три. **227.** $90°$. **234.** а) CB; б) AB. **235.** CD. **236.** Чотири або жодного. **237.** Ні. **238.** $a \parallel b$. **239.** A, C, D, E. **240.** а) KN; б) MN. **241.** а) AB; б) CB. **244.** Так. **245.** Якщо перпендикуляри, проведені з точок A і B до прямої c, мають спільну основу. **257.** 8 см. **262.** 8 см. **270.** $\triangle ACD$, $\triangle BCD$. **277.** 1 м; 0,8 м; 0,8 м. **278.** а) 5 см; б) 8 см, в) 6 см, 6 см, 8 см. **285.** 9 м, 6 м, 6 м або 8 м, 8 м, 5 м. **286.** 12 см. **294.** в). **310.** 16 см. **311.** 14 см. **318.** 6 см. **330.** $\angle A = \angle A_1$; $BC = B_1C_1$. **337.** $\angle BCA = \angle B_1CA$ або $AB = A_1B_1$. **352.** б), г). **353.** а) $b \parallel c$; б) $b \parallel c$. **365.** Ні. **370.** $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. **377.** Три; два. **386.** а) $66°$, $114°$; б) $32°$, $32°$. **387.** Три кути по $18°$ і чотири кути по $162°$. **388.** а) Так; б) так. **389.** Ні. **390.** $b \perp c$. **391.** A_1A_2 і B_1B_2 **392.** а) $110°$; б) $158°$. **393.** а) $75°$ і $105°$; б) $28°$ і $152°$. **394.** Ні. **395.** $72°$. **400.** *Вказівка.* Проведіть через точку E пряму, паралельну AB. **401.** а) $90°$; б) $30°$ і $150°$; в) $50°$ і $130°$. **413.** а) $70°$; б) $42°$; в) $26°$. **414.** а) $40°$ і $100°$; б) $70°$ і $70°$. **415.** а) $90°$ і $62°$; б) $80°$ і $20°$. **418.** $45°$, $70°$ і $65°$. **419.** $55°$ і $85°$; $140°$ і $95°$. **420.** а) $30°$, $50°$, $100°$; б) $20°$, $60°$, $100°$. **421.** $50°$ і $80°$ або $65°$ й $65°$. **422.** а) $20°$, $70°$, $90°$; б) $40°$ і $40°$. **423.** Ні. **425.** $20°$, $20°$, $140°$. **426.** $65°$. **427.** $120°$. **428.** $100°$, $40°$, $40°$. **429.** $120°$, $30°$, $30°$. **430.** $30°$, $60°$, $90°$. **431.** $30°$, $50°$, $100°$. **432.** $72°$, $72°$, $36°$. **433.** $72°$, $72°$, $36°$. **434.** $108°$, $36°$, $36°$. **435.** $108°$, $36°$, $36°$. **436.** $90° + \frac{\alpha}{2}$. **448.** $90°$, $45°$, $45°$. **449.** $90°$, $60°$, $30°$. **450.** а) $15°$ і $75°$; б) $50°$ і $40°$. **451.** а) $50°$ і $40°$; б) $20°$ і $70°$. **454.** D. **455.** C. **456.** $90°$, $25°$, $65°$. **457.** $80°$, $52°$, $48°$. **458.** 8 см. **459.** $55°$, $55°$, $70°$. **460.** $32°$, $58°$. **463.** $65°$, $65°$, $50°$ або $115°$, $15°$, $50°$. **464.** $65°$, $25°$. **467.** $70°$, $70°$, $40°$. **468.** $50°$, $50°$, $80°$. **469.** *Вказівка.* Скористайтеся методом подвоєння медіани. **471.** $67°$ і $23°$ **472.** $72°$, $72°$, $36°$. **473.** 12 см і 6 см. **474.** 7 см і 14 см. **475.** 12 см. **476.** 12 см. **477.** 8 см. **478.** $80°$. **479.** а) DE; б) K. **480.** Висота. **481.** а)–г). Ні. **482.** Ні. **483.** 5 см. **486.** A. **487.** C. **488.** BC. **489.** а) 14 см; б) 10 см; в) 3 см або 4 см. **490.** 16 см. **494.** а) Ні; б) так. **495.** BC. **496.** B. **497.** 5 см, 5 см і 8 см або 7 см, 7 см і 4 см. **498.** 10 м, 30 м і 30 м. **499.** 1 м. **502.** BC. 503. B. **505.** b. **506.** а) $a - b < c < a + b$; б) $2a < P < 2(a + b)$. **507.** *Вказівка.* Скористайтеся

www.e-ranok.com.ua

методом подвоєння медіани. **510.** AOB і COD, AOD і COD, BAD і DCB, ABC і CDA. **512.** Три. **514.** Ні. **516.** $20°$, $30°$, $130°$. **517.** Ні. **520.** $90°$, $60°$, $30°$. **526.** α або $180°-\alpha$. **528.** 6 см. **529.** 5 см. **530.** 9 см або 5 см. *Вказівка.* Трикутники ABK і MBC рівнобедрені. **531.** $120°$. **533.** а) 3; б) 13.

Розділ III. Коло і круг. Геометричні побудови

540. 16 см. **541.** 5,5 см. **542.** б) 22 см. **543.** 15 см. **544.** $60°$. **545.** $120°$. **547.** $90°$. **550.** *Вказівка.* Скористайтеся нерівністю трикутника для трикутника, утвореного довільною хордою й радіусами, проведеними до її кінців. **552.** $120°$. **553.** $90°$. **557.** $90°$, $50°$, $40°$. **564.** а) $70°$; б) 8 см. **565.** $45°$ і $45°$. **566.** $30°$. **567.** $60°$. **568.** $30°$. **569.** $130°$. **570.** 3 см і 25 см. **574.** $120°$. **575.** $80°$. **576.** 2 см або 18 см. **577.** 10 см і 6 см. **579.** 15 см. **580.** 14 см. **581.** а) 1, або 2, або 3, або 4; б) 1, або 2, або 3, або 6. **603.** *Вказівка.* Скористайтеся методом подвоєння медіани. **604.** *Вказівка.* Проведіть пряму, паралельну даній стороні, так, щоб відстань між ними дорівнювала даній висоті. **609.** 11 см. **612.** в) Ні. **624.** Серединний перпендикуляр до відрізка AB. **625.** Коло з центром A радіуса R. **626.** Бісектриса даного кута без його вершини. **627.** Дві прямі, паралельні AB й віддалені від неї на h. **631.** Діаметр кола, перпендикулярний до даної прямої, без кінців цього діаметра. **632.** Коло, що дотикається до даних хорд, із центром, який збігається з центром даного кола. **633.** Пряма OA без точок O і A. **634.** Бісектриси всіх нерозгорнутих кутів, утворених даними прямими. **640.** 90°. **648.** б) $80°$. **649.** б) $20°$. **652.** 18 см. **653.** $50°$. **654.** 8 см. **655.** $55°$. **658.** 32 см. **659.** 22 см. **662.** 77 см, 77 см, 66 см або 70 см, 70 см, 80 см. **665.** $2R$. **667.** Якщо $AB<6$ см — дві точки, якщо $AB=6$ см — одна точка, якщо $AB>6$ см — жодної точки. **672.** a. **673.** Шість. **674.** $36°$, $36°$, $108°$ або $\left(25\frac{5}{7}\right)°$, $\left(77\frac{1}{7}\right)°$, $\left(77\frac{1}{7}\right)°$. **675.** $70°$, $70°$, $40°$. **676.** б) Ні, якщо кути BAC і DAC не гострі. **678.** $30°$. **681.** *Вказівка.* Точка дотику є точкою перетину даного кола і кола з діаметром AO. **682.** $a+c-b$.

www.e-ranok.com.ua

Предметний покажчик

А

Аксіома 6
— вимірювання відрізків 16
— — кутів 24
— відкладання відрізків 16
— — кутів 24
— паралельних прямих (Евкліда) 32
— проведення прямої 8
— розміщення точок на прямій 8
Аналогія 26

Б

Бісектриса кута 23
— трикутника 99
Бічна сторона рівнобедреного трикутника 90

В

Вершина кута 21
— трикутника 63
Висновок 34
Висота трикутника 100
Вимірювання відрізків 15
— кутів 23
Відрізки дотичних 172
— паралельні 31
— перпендикулярні 47
— рівні 14
Відрізок 14
Відстань від точки до прямої 78
— між двома точками 17
— між паралельними прямими 126
Властивість 110
— відрізків дотичних 172
— діаметра, перпендикулярного до хорди 166
— дотичної 170
— кутів рівнобедреного трикутника 91
— — утворених при перетині паралельних прямих січною 123
— медіани, бісектриси й висоти рівнобедреного трикутника 100

Г

Геометричне місце точок (ГМТ) 187
Гіпотенуза 139
Градусна міра кута 24

Д

Діаметр 166
Довжина відрізка 16
Дотична до кола 170
Дотик двох кіл 172
— — — внутрішній 173
— — — зовнішній 173

Е

Елементи трикутника 63

К

Катет 139
Кінці відрізка 14
Класифікація 133
Коло 165
— вписане у трикутник 197
— описане навколо трикутника 195
Контрприклад 71
Круг 165
Кут 21
— гострий 25
— між двома прямими 46
— прямий 24
— розгорнутий 22
— трикутника 63
— — зовнішній 134
— тупий 25
Кути вертикальні 45
— відповідні 115
— внутрішні односторонні 115
— — різносторонні 115
— рівні 22
— суміжні 39

М

Медіана трикутника 99
Метод геометричних місць 190
— доведення від супротивного 35
— допоміжного трикутника 184
— подвоєння медіани 104
— спрямлення 216

www.e-ranok.com.ua

Н
Наслідок 40
О
Ознака 110
— дотичної 171
— рівнобедреного трикутника 92
Ознаки рівності прямокутних трикутників 139, 140
— рівності трикутників 69, 83, 108
— паралельності двох прямих, які перетинаються січною 115, 116
Означення 10
Основа рівнобедреного трикутника 90
П
Периметр трикутника 64
Перпендикуляр, проведений з точки до прямої 78
— серединний до відрізка 181
— спільний до двох прямих 126
Півпряма 9
Планіметрія 6
Побудова 177
— бісектриси кута 179
— кута, який дорівнює даному 179
— перпендикулярної прямої 180
— прямої, паралельної даній 181
— середини відрізка 181
— трикутника за даними сторонами 178
Посилання 40
Початкова точка променя 9
Початок променя 9
Промені доповняльні 9
Промінь 9
Пряма 7
Прямі паралельні 31
— перпендикулярні 47
Р
Радіус кола (круга) 165
С
Середина відрізка 15
Січна 115
— кола 170
Сторона кута 21
— трикутника 63
Т
Теорема 32
— обернена 94
— про бісектрису кута 189
— — вертикальні кути 45
— — відстані від точок прямої до паралельної прямої 125
— — дві прямі, паралельні третій 32
— — —, перпендикулярні до третьої 47
— — зовнішній кут трикутника 134
— — існування і єдиність перпендикулярної прямої 76
— — — — — прямої, паралельної даній 118
— — коло, вписане у трикутник 197
— — —, описане навколо трикутника 195
— — серединний перпендикуляр 188
— — суміжні кути 39
— — суму кутів трикутника 131
— пряма 94
Точка 7
— дотику 170
Трикутник 63
—, вписаний у коло 195
— гострокутний 132
—, описаний навколо кола 197
— прямокутний 132
— рівнобедрений 90
— рівносторонній 90
— різносторонній 90
— тупокутний 132
У
Умова 34
Ф
Фігури рівні 64
Х
Хорда 166
Ц
Центр кола (круга) 165
— —, вписаного у трикутник 197
— —, описаного навколо трикутника 195

www.e-ranok.com.ua

Зміст

Розділ I. Елементарні геометричні фігури та їхні властивості. Взаємне розміщення прямих на площині 5
§ 1. Геометричні фігури. Точка, пряма, промінь 7
§ 2. Відрізок. Вимірювання та відкладання відрізків. Відстань між двома точками 14
§ 3. Кут. Вимірювання та відкладання кутів. Бісектриса кута 21
§ 4. Паралельні прямі 31
§ 5. Суміжні кути та їхні властивості 39
§ 6. Вертикальні кути та їхні властивості. Перпендикулярні прямі. Кут між двома прямими 45
Підсумки 53
Розділ II. Трикутники. Ознаки рівності трикутників 61
§ 7. Трикутник і його елементи. Рівність геометричних фігур 63
§ 8. Перша ознака рівності трикутників та її застосування 69
§ 9. Перпендикуляр до прямої. Відстань від точки до прямої 76
§ 10. Друга ознака рівності трикутників та її застосування 83
§ 11. Види трикутників. Рівнобедрений трикутник, його властивість та ознака 90
§ 12. Медіана, бісектриса й висота трикутника. Властивості та ознаки рівнобедреного трикутника, пов'язані з ними 99
§ 13. Третя ознака рівності трикутників та її застосування 108
§ 14. Кути, утворені при перетині двох прямих січною. Ознаки паралельності прямих 115
§ 15. Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною 123
§ 16. Сума кутів трикутника. Зовнішній кут трикутника 131
§ 17. Прямокутні трикутники. Ознаки та властивості прямокутних трикутників 139
§ 18. Співвідношення між сторонами і кутами трикутника. Нерівність трикутника 146
Підсумки 153
Розділ III. Коло і круг. Геометричні побудови 163
§ 19. Коло і круг 165
§ 20. Дотична до кола, її властивість та ознака 170
§ 21.* Задача на побудову та її розв'язування. Основні задачі на побудову . . . 177
§ 22. Геометричне місце точок 187
§ 23. Описане і вписане кола трикутника 195
Підсумки 203
Додатки 213
Відповіді та вказівки 219
Предметний покажчик 222

www.e-ranok.com.ua

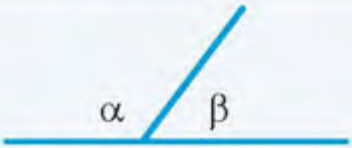
Відомості про користування підручником

№ з/п	Прізвище та ім'я учня / учениці	Навчальний рік	Стан підручника	
			на початку року	в кінці року
1				
2				
3				
4				
5				

www.e-ranok.com.ua

Прямі і кути

Суміжні кути



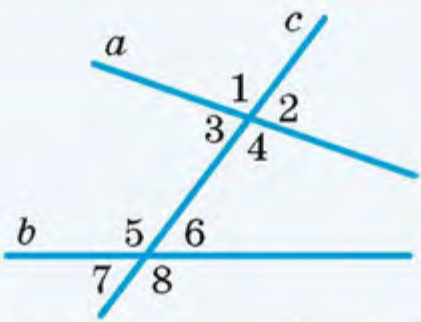
$\alpha + \beta = 180°$

Вертикальні кути



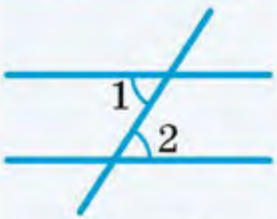
$\angle 1 = \angle 2$

Кути, утворені при перетині двох прямих січною

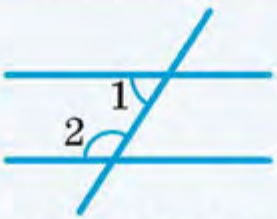


Кути 3 і 6, 4 і 5 — внутрішні різносторонні
Кути 3 і 5, 4 і 6 — внутрішні односторонні
Кути 1 і 5, 3 і 7, 2 і 6, 4 і 8 — відповідні

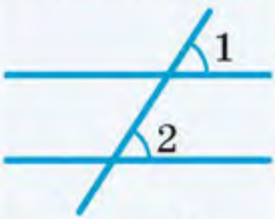
Паралельні прямі



$\angle 1 = \angle 2$



$\angle 1 + \angle 2 = 180°$

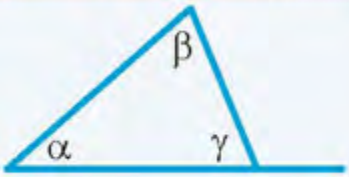


$\angle 1 = \angle 2$

www.e-ranok.com.ua

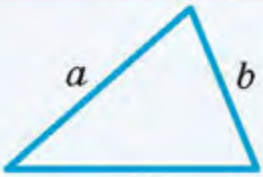
Трикутник

Сума кутів трикутника



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Нерівність трикутника



$$a + b > c \qquad a + c > b$$
$$b + c > a$$

Медіана, бісектриса, висота трикутника



Медіана



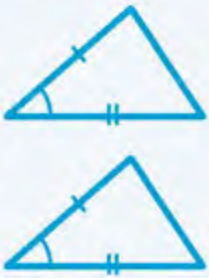
Бісектриса



Висота

Ознаки рівності трикутників

Перша



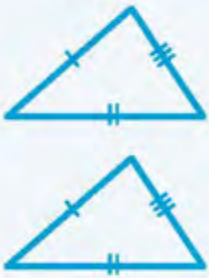
За двома сторонами й кутом між ними

Друга



За стороною і прилеглими до неї кутами

Третя



За трьома сторонами

www.e-ranok.com.ua

ІНТЕРНЕТ-ПІДТРИМКА

Матеріали до підручника

interactive.ranok.com.ua

Видання є складовою навчально-методичного комплекту «Геометрія-7»

- **ПІДРУЧНИК «ГЕОМЕТРІЯ. 7 КЛАС»**
- **Збірник самостійних і контрольних робіт**
- **Розробки уроків**

ОСОБЛИВОСТІ ПІДРУЧНИКА

- багаторівнева побудова навчального матеріалу
- тематичне узагальнення і систематизація
- авторська система усних, графічних та письмових вправ
- доступність викладення, зручність користування

ISBN 978-617-09-2105-5

9 786170 921055 >

ВИДАВНИЦТВО РАНОК

Навчально-методична література видавництва «РАНОК»

УСІ КНИГИ ТУТ!

КУПИТИ: WWW.RANOK.COM.UA

ЗАВАНТАЖИТИ: WWW.E-RANOK.COM.UA

ЗАМОВИТИ: (057) 727-70-90, pochta@ranok.com.ua

e-RANOK рекомендує:

Електронні книги



Хімія.
Плани конспекти уроків.
7 клас.



Всесвітня історія.
Розробки уроків.
7 клас.



Географія.
Розробки уроків.
7 клас.

Нас цікавлять Ваші враження та побажання!

Придбайте книжку собі до смаку саме зараз!

e-ranok.com.ua

Ми у соціальних мережах: